

Physik des Skispringens

Diplomarbeit
in der Studienrichtung
Lehramtsstudium Physik - Mathematik

zur Erlangung des akademischen Grades
MAGISTER DER NATURWISSENSCHAFTEN

eingereicht an der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
der Leopold–Franzens–Universität Innsbruck

von
Robert Weitlaner

bei
Univ.Prof. Mag. Dr. Walter Saurer
Institut für Astro- und Teilchenphysik

INNSBRUCK, APRIL 2008

***Dank** gebührt meinen Eltern
und meiner Familie für die großzügige Unterstützung,
meinen Freunden,
und meinen Betreuern
Univ. Prof. Mag. Dr. Walter Saurer
Univ. Ass. Mag. Dr. Kurt Schindelwig*

Hiermit bestätige ich, dass sämtliche Ausführungen, wenn nicht eindeutig gekennzeichnet, von mir stammen. Speziell wurden sämtliche Abbildungen, wenn nicht eindeutig markiert von mir angefertigt, andernfalls entstammen sie der Wikimedia Commons Datenbank.

Robert Weitlaner

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Historischer Abriss	3
1.2	Physikalische Grundlagen	7
1.2.1	Schräger Wurf	8
1.2.2	Freier Fall mit Luftwiderstand	10
1.2.3	Hydrodynamische Aspekte	12
1.2.4	Bewegungsgleichung des Skispringers	22
2	Messsystem	33
2.1	Messanordnung	35
2.1.1	Kamera 1	35
2.1.2	Kamera 2	36
2.1.3	Kamera 3	36
2.1.4	Kamera 4	38
2.1.5	Kamera 5	38
2.2	Vermessung	40
2.2.1	Fehler der Vermessung	43
2.3	3D Rekonstruktion	45
2.3.1	Ideale Lochkamera	50
2.3.2	Direct Linear Transformation	51
2.3.3	TSAI Algorithmus	66
2.3.4	Optimierung der Winkel in der Rotationsmatrix	75
2.4	Ergebnisse	76
3	Fachdidaktik	81
3.1	Schülervorstellungen in der Physik	81
3.2	Unterrichtsentwurf	85

4 Zusammenfassung	90
Literaturverzeichnis	93
Abbildungsverzeichnis	98
A Lebenslauf	100
B Tachymeter	101
C Messprotokoll	103
D Kalibrierungsparameter	107
E Kameradatenblatt	110

1 Einleitung

Die Weiterentwicklung von Sportgeräten und Optimierung von Bewegungsabläufen konnte vielen Sportarten zu revolutionären Leistungsfortschritten verhelfen. Dies ist darauf zurück zu führen, dass an vielen Institutionen konsequent daran gearbeitet wird, die eigenen Sportler Wettkämpfe gesund und erfolgreich bewältigen zu sehen. Materialeigenschaften und biomechanische Abläufe werden sowohl durch theoretische als auch experimentelle Untersuchungen optimiert. Was dabei erreicht wird, kann sehr beeindruckend am Skispringen nachvollzogen werden. Kaum einer hätte zu Beginn des 20. Jahrhunderts geglaubt, dass knapp 90 Jahre später Skispringer Weiten von 200 Meter überfliegen würden. Im Abschnitt 1.1 werden die chronologischen Entwicklungen im Bereich des Skispringens aufgelistet. Von R. Straumann wurde bereits 1927 die Grundlage für eine mathematische Beschreibung des Skispringens geliefert. Daraufhin wurden viele Publikationen veröffentlicht, die sich laut [56, S.7] in drei Formen einteilen lassen: Feldstudien, Laborstudien und Verletzungsproblematik. In [18, S.11] heißt es aber, dass die meisten der Fortschritte auf kreative Sportler und Trainer zurückzuführen sind.

Auf dem Areal der Bergisel Schanze in Innsbruck wird daran gearbeitet, den österreichischen Sportlern zu jenem kleinen Vorsprung zu verhelfen, der über Sieg oder Niederlage entscheidet. Nach dem Neubau der Anlage bis zum Jahr 2002 wurde ein kinematisches und dynamisches Messsystem integriert. Im letzten Bereich vor der Absprungkante wurden laut K. Winkler [56] sieben 80x150cm Druckmessplatten, ähnlich zu [38], fix unterhalb der Anlaufspur installiert. Mittels Auswertung der aufgezeichneten Druckverläufe und der Aufzeichnung der Absprunghase durch zwei Hochgeschwindigkeitskameras kann dem Trainerstab innerhalb von 30 Minuten, ab Absprung, eine Sprunganalyse angeboten werden. Entlang des Sprunghügels wurden Ultraschall Windgeschwindigkeitsmessgeräte aufgestellt. Vier weitere Hochgeschwindigkeitskameras, welche die Flugphase vom Absprung bis zur Landung aufzeichnen,

1 Einleitung

bilden die Komplettierung des Messsystems in Abschnitt 2.1.

In Abschnitt 1.2.1 wird versucht, das Konzept des schrägen Wurfs durch Begriffe aus der Aerodynamik, Lift und Drag, zu erweitern, um auf die Bewegungsgleichung des Skispringers zu kommen. Dadurch wird die Physik des Skispringens für Schüler nachvollziehbar, und bestimmte technische Innovationen in diesem Sport werden verständlich. Anhand des Beispiels aus der Alltagswelt in Abschnitt 1.2.3 werden die Ausdrücke Lift und Drag erläutert und deren Bedeutung für den Skispringer anschaulich.

In Abschnitt 2 wird das vorhin beschriebene Messsystem genauer beleuchtet und weiters die Grundlage für eine 3D Rekonstruktion, nämlich die Vermessung von Passpunkten samt Fehlerabschätzung, beschrieben. Weiters werden didaktisch aufbauend, beginnend mit der idealen Lochkameraabbildung (S.50) bis zum vollständigen Linsensystem, die Charakteristiken von optischen Abbildungen beschrieben. Das verwendete Verfahren für die Rekonstruktion nach R. Y. Tsai [44] wird in Abschnitt 2.3.3 erklärt und die Implementierung in Matlab kurz geschildert. Die Ergebnisse der Rekonstruktion nach [44] werden in Abschnitt 2.4 geliefert. Der Vergleich zwischen einfachstem Modell und komplexerer Version könnte in Anbetracht der Physikdidaktik ein Beispiel für die Methode der Naturwissenschaften sein. Sie beschreibt das naturwissenschaftliche Vorgehen, wonach für eine Beobachtung in der Natur ein Modell erstellt wird und dieses durch Vorhersagen über Ausgänge von Experimenten zu bestätigen versucht wird. Treffen die Vorhersagen zu, ist das neue komplexe Modell eine womöglich bessere Beschreibung der Beobachtung in der Natur. Stimmen die Vorhersagen nicht mit dem Experiment überein oder ist kein Informationsgewinn entstanden, muss geprüft werden, ob die Annahmen, die das alte Modell verbessern sollten, falsch oder unnötig sind.

Bei genauer Beobachtung verschiedener Skispringerflugbahnen mit bloßem Auge fällt auf, dass sich diese stark voneinander unterscheiden können. Ein Springer kann in der ersten Flugphase sehr stark an Flughöhe relativ zum Sprunghügel gewinnen, dann aber plötzlich „abstürzen“. Ein anderer kann im Vergleich dazu, obwohl niemals so hoch über dem Sprunghügel, doch wesentlich weiter springen.

1.1 Historischer Abriss

Numerische Behandlungen der Flugbahn von Skispringern haben ergeben, dass bewusste Veränderungen der Körperposition in bestimmten Abschnitten der Flugphase positive Effekte auf die erzielbaren Weiten haben können. Natürlich kann auch der gegenteilige Fall eintreten, das heißt, dass mehr aus einem Sprung gemacht hätte werden können. Als Grundlage für die Analyse von Flugbahnen muss diese möglichst genau vermessen werden. Ist dies geschehen, kann die tatsächliche Flugbahn mit einer theoretisch möglichen verglichen werden, und so Flugphasenabschnitte bestimmt werden, in denen im Vergleich zur optimalen Flugbahn ein starker Höhenverlust stattgefunden hat. Das Ergebnis wären eventuelle Verbesserungsvorschläge für den Sportler.

Diese Arbeit untersucht, wie genau die Flugbahn koordinatenmäßig erfassbar ist. Dazu wird das vorhandene Messsystem in Abschnitt 2.1 analysiert. Verschiedene Modelle für das Abbildungsverhalten in einer Kamera werden dabei miteinander verglichen, und untersucht, ob sich ein höhere Komplexität in einer höheren Genauigkeit widerspiegelt. Diese Ausführungen in Abschnitt 2.3 werden von grundlegenden Betrachtungen zum Skisprungsport in Abschnitt 1.2 und didaktischen Aspekten in Abschnitt 3 zum Thema Skispringen im Physikunterricht umrahmt.

1.1 Historischer Abriss

Das erste historische Auftreten von etwas Skiähnlichem kann auf eine Zeit von 2500 v.Chr. datiert werden. Eine Felszeichnung, die laut [8] 1929 auf einer norwegischen Insel entdeckt wurde, zeigt einen mit Hasenfell getarnten Jäger auf vorne aufgebo- genen Holzlatten stehend. Ähnliches Alter besitzen in Schweden gefundene Reste von „Skiern“. Damals dienten Holzlatten selbstverständlich nicht einer sportlichen Betätigung, sie waren vielmehr Alltagsgegenstände, die zur Erleichterung der Fort- bewegung im Schnee beitrugen. Aus China sind schriftliche Aufzeichnungen aus dem 7. Jahrhundert überliefert, in denen von „Holzpferdtürken“ [8, S.7] berichtet wird, die übers Eis laufen können. Auch die mitteleuropäischen Germanen hatten für die finnischen Zeitgenossen, die sich auf dem Schnee besser fortbewegen konnten als sie, Beinamen: „skridhfinnen“, was laut [8, S.7] soviel bedeutet wie „Skifahrerlappen“.

1.1 Historischer Abriss

Im Laufe der Jahrhunderte etablierte sich die Fortbewegung auf Schnee mittels diverser Arten von Skiern (Holzlatten) und Schneeschuhen und wurde zu einem „Bestandteil der menschlichen Kultur“ [16, S.1]. Es entstanden Sagen und Märchen von heldenhaft skifahrenden Männern. So wird der Wasalauf, ein schwedischer Volkslanglaufwettbewerb über 90km, laut [8, S.10] als Erinnerung an die Flucht von Gustav Erikson Wasa auf Skiern vor dänischen Soldaten im Jahre 1523 veranstaltet. Neben der Verwendung für die Jagd fanden Skier neben dem Krieg langsam auch für vergnügliche Zwecke Verwendung. So übten sich die Lappen um 1600 „im Schneelauf, im Weitsprung im Schnee und im Hochsprung über einen Strick oder Stock“ [16, S.1].

Aus dem 19.Jahrhundert schließlich sind erste Weitenmessungen belegt, deren zufolge der dänische Soldat Olaf Rye 1808 einen Sprung von 9,5m vollführte. 1860 konnte der norwegische Zimmermann Sondre Auverson Nordheim aus der Provinz Telemark mit einem Sprung von einem Felsen 30,5m weit springen. Zu dieser Zeit entwickelte sich demnach bereits ein Wettbewerbsdenken im Skispringen. Nachdem in den 1860er Jahren [8, S.16] die ersten offiziellen Springen organisiert wurden, sprang der Funken der Skisprungbegeisterung mit der Eröffnung des Christiania (heutiges Oslo [8, S.11]) Skiclubs und den ersten großen Veranstaltungen auf dem Holmenkollen von Christiania auf größere Schichten der norwegischen Bevölkerung über. Dabei hatte die Sportart bereits ihre ersten Fortschritte vorzuweisen: Die ersten Sprünge wurden mit einem Stock als Balancehilfe in eher flachem Gelände ausgeführt. Die Schanzenanlage in Oslo befand und befindet sich heute noch an der selben Stelle am Holmenkollen, auf einem Hügel, wodurch ein einfacheres Landen in steilem Gelände ohne Balancestock möglich wurde. In [16, S.14] werden zeitgenössische Berichte angeführt: „Wie viele Zuschauer sich bei einem solchen Anlass versammeln, ist nicht leicht zu sagen, aber gewiss sind es bei 20.000“. Die waghalsigen Akrobaten verstanden es demnach, durch ihren tollkühnen Mut bei Sprüngen bis zu 25m über die ein bis zwei Meter aufgeschütteten Erdwälle die Massen zu begeistern. Die Sprungstile reichten von geduckt mit angezogenen Beinen um 1850, bis gestreckt mit Skiern parallel zum Aufsprunghügel und rotierenden Armen.

Der Landungsstil, der vorerst in den Bewerben nicht von Bedeutung war, vereinheitlichte sich langsam zum Telemarkstil. Es wurde kurzzeitig sogar nicht bewertet, ob der Athlet stürzte oder weiterfahren konnte. Bald einigten sich die Sportler auf ein Bewertungssystem welches Haltung, Sprungweite, Aufsprung und Weiterfahrt

1.1 Historischer Abriss

berücksichtigt.

Die mitteleuropäischen Skispringer waren um die Jahrhundertwende weit hinter ihren skandinavischen Kollegen zurück [8, S.68]. Erst als die Skandinavier es versäumten, sich die kreativen Ideen der Mitteleuropäer anzueignen, verloren sie die Vormachtstellung in ihrer Paradedisziplin. Ihrer Meinung nach sollte der ästhetische Aspekt im Vordergrund stehen.

1910 konnten einige Springer wie Sepp Bildstein durch leichtes Abwinkeln des Körpers und „Vorlegen des Oberkörpers“ [8, S.23] 40m weit springen. Er berichtete:

„Ein unbekanntes Gefühl wird hervor gezaubert; mir ist, als läge ich mit der Brust in der Luft, als schwebte ich einem Vogel gleich davon, langsam tiefer sinkend.“[16, S.16]

Erstmals wurde aufgrund von aerodynamischen Überlegungen der Sport revolutioniert. Gleichzeitig entwickelte sich in Nordamerika die Skisprungeinlage eines ausgewanderten Norwegers [16, S.15] in einer Zirkusshow zu einem medialen Lauffeuer, das schließlich sogar die Präsidentschaftskandidaten in Karikaturen durch die Lüfte fliegen ließ. Diese Begeisterung in Übersee resultierte in einem Bauboom von rekordverdächtigen Schanzenanlagen, auf denen neue Rekorde aufgestellt wurden.

Die ersten theoretischen Betrachtungen zur Flugtechnik beim Skispringen wurden laut [43, S.10] vom Schweizer R. Straumann in den 1920er Jahren in zwei Ausgaben des Jahrbuchs des Schweizer Skiverbandes [41, 42] veröffentlicht. Er gibt als erster die Bewegungsgleichungen für die Flugphase an, wobei er laut [43, S.10] unzulässige Vereinfachungen annimmt (S.27). Er berechnet für verschiedene Sprungstile die optimalen Körperpositionswinkel und Schanzenprofile auf denen die Landebelastungen für die Springer verringert werden. Straumann führt Windkanalmessungen mit 1:4 Skispringer Modellen bei Variation von Körperhaltung und Positionswinkel durch. H. Schwameder fasst in seiner Dissertation [37] Straumanns Resultate zusammen: „Als günstigste Körperlage gibt Straumann [...] die gestreckte Körperhaltung bei 23° Vorlage an.“

Während neue Sprungstile mit elliptisch rotierenden bis nach vorne gestreckten Armen kreiert wurden, blieben Straumanns theoretische und laborgestützte Untersuchungen bis in die Fünfziger Jahre unbeachtet. Auch ohne Anwendung theoretischer

1.1 Historischer Abriss

Überlegungen gelang es Sepp Bradl 1936 in Planica die 100m Marke zu überfliegen. Erst in den Fünfzigerjahren konnte Straumann mit dem Schweizer Andreas Däscher einen willigen und lernfähigen Springer finden, der seine Theorien als erster fast perfekt beherrschte [32, S.63]. Däscher sprang als erster mit angelegten Armen, seine Hände sollten den Flug wie Flossen steuern. Bei den Olympischen Spielen 1948 in St. Mortiz kam ihm jedoch ein Norweger mit gleichem Sprungstil zuvor. Die Leistungen von Straumann werden in [16, S. 17] als Grundlage für die Wandlung des Skisprungsports geehrt:

„Aus einem Springer, der wie in der Leichtathletik aufgrund von Anlauf(fahrts)geschwindigkeit und Absprung seine Leistung erzielen will, wird ein Flieger, der sich von der Luft tragen lässt, der versucht, Auftrieb zu erhalten, ein Luftpolster zu finden.“

Als die Finnen sich mit der Straumann Methode anfreundeten, wurde aus dem Däscherstil der Fisch-, Tropfen- [16, S.18] und der „Finnen-Stil“¹ und war über zehn Jahre dominant. Einige Abwandlungen des Däscherstils konnten sich teilweise jahrelang halten. Manch einer sprang mit den Armen vor dem Kopf, „als wolle er einen Kopfsprung ins Wasser machen“ [32, S.14f], andere mit extremer aber gefährlicher Vorlage, die hervorragende Weiten erlaubte. Laut [37] folgten viele weitere Untersuchungen in denen die Winkel zwischen den Skiern und Flugrichtung, zwischen Beinen und Oberkörper und zwischen Flugrichtung und Oberkörper betrachtet wurden. H. Haim schreibt in [14], dass die Skisprungforschung in den Fünfziger und Sechzigerjahren hauptsächlich von G. Hochmuth geprägt wurde.

Bis der Schwede Jan Bokloev 1987 mit seinem neuen Stil auftauchte, gab es nur wenige weitere Änderungen.

„Jan Bokloev war ein namenloser Schwede, bis ihm 1986 ein Trainingsprung missglückte. Zum eigenen Unverständnis segelte er bis ins Flache - mit gespreizten Beinen, die einem „V“ glichen.“²

Ein neuer Stil war geboren, der vorerst mit hohen Punkteabzügen bestraft wurde, schließlich aber doch Wettkämpfe entschied und zum Standard wurde. Dem Schweden gelang es, bis die Konkurrenz auf seine Technik reagierte, den Gesamtweltcup

¹ siehe www.skispringen.com unter Archiv und Geschichte, zuletzt 14. April 2008

² siehe www.sportsplanet.at/VStil.htm, zuletzt 14. April 2008

1.2 Physikalische Grundlagen

für sich zu entscheiden. Dann konnte er nicht mehr mithalten und verschwand aus der siegreichen Springergruppe. Seit 1994 bilden laut H.Haim [14, S.26] vor allem die Dissertation von H.Schwameder [37] und Arbeiten von M. Virnavirta [47, 48] die Grundlagen für weitere Untersuchungen und Fortschritte im Skispringen. Wo bei es bei [37] darum geht die damals neue V-Technik „aus biomechanischer Sicht zu beschreiben und leistungsbestimmende Faktoren zu ermitteln.“ [14, S.26]. M. Virnavirta verfasst u.a. Artikel über die Absprungphase [47], die Limitierung des Absprungpotentials durch die Sprungschuhe [48] und genaue Analysen der „Early Flightphase“ [46].

1.2 Physikalische Grundlagen

Für die Beschreibung von Bewegungen steht mit der Newtonschen Mechanik ein mächtiger Apparat zur Verfügung. Aus dem zweiten Newtonschen Axiom

$$m\ddot{\vec{x}} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{resultierend}} \quad (1.1)$$

kann bei Kenntnis der auf das interessierende Objekt wirkenden Einflüsse, Kräfte, die Bewegungsgleichung angeschrieben werden. Der Vektor \vec{x} beschreibt die Position des Objekts im Raum. Sie ist bei einem dynamischen Prozess von der Zeit t abhängig $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Ableiten nach t ergibt eine Ortsänderung pro Zeiteinheit, was sinngemäß als Geschwindigkeit (ms^{-1}) bezeichnet wird. Die zweite Ableitung ergibt eine Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit und wird als Beschleunigung (ms^{-2}) bezeichnet. Die Bewegungsgleichung kann nach Einsetzen der Kräfte in Gleichung (1.1) durch Integrieren gelöst werden.

$$\vec{x}(t) = \int_{t_0}^t \dot{\vec{x}}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau'} \ddot{\vec{x}}(\tau) d\tau \right) dt'$$

Bei der Integration treten mehrere Integrationskonstanten auf, welche durch Angabe von Anfangsbedingungen eindeutig bestimmbar sein müssen. Anhand eines einfachen Beispiels soll diese Vorgehensweise dargestellt werden.

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Schräger Wurf

In der Alltagswelt der Schüler ist der schräge Wurf von Kindesbeinen, beginnend mit der Schneeballschlacht bis hin zum Sportunterricht, allgegenwärtig. Dort müssen sich Schüler in der Disziplin Schlagballwurf messen. Dabei tritt häufig die Frage auf, unter welchem Winkel am weitesten geworfen werden kann. Die Flugbahn des Balls lässt sich wie folgt modellieren.

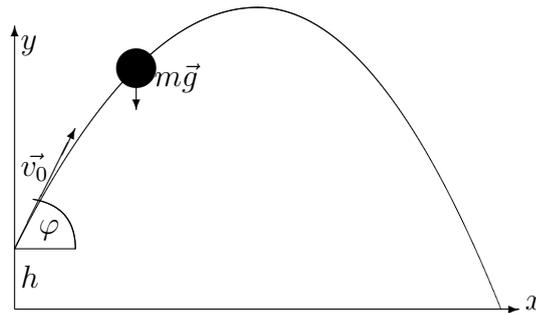


Abb. 1.1: Schräger Wurf

Auf den Ball soll außer der Gravitation keine weitere Kraft wirken, und die Bewegung spielt sich in einer Ebene ab. Diese Ebene wird durch ein Koordinatensystem beschrieben, welches die x-Achse entlang der Horizontalen und die y-Achse entlang der Vertikalen nach oben einnimmt (Abb.1.1). Damit lauten die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t=0$: Der Ball, auf den die Kraft $m\vec{g}$ wirkt, bewegt sich beim Startpunkt \vec{x}_0 , der Position der werfenden Schülerhand, mit einer Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 . Die Differentialgleichung nach (1.1) lautet::

$$m\ddot{\vec{x}} = m\vec{g} \quad (1.2)$$

Durch Kürzen der Masse und anschließendes zweimaliges Integrieren erhält man:

$$\vec{x} = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$$

mit

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \quad \vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

1.2 Physikalische Grundlagen

Daraus wird in Komponentenschreibweise

$$x = v_0 t \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t \sin \varphi + h \quad (1.3)$$

und nach Elimination von t die Flughöhe y als Funktion von x :

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 + x \tan \varphi + h \quad (1.4)$$

Es ist ersichtlich, dass die Flugbahn des Schlagballs (1.4) eine Parabel ist. Wo deren Scheitel und deren Nulldurchgänge liegen, sollte für einen Schüler der Oberstufe mit Kenntnis über den Umgang mit quadratischen Gleichungen leicht zu bestimmen sein. Für die Nulldurchgänge ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{v_0^2}{g} \cos \varphi \left(\sin \varphi \pm \sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \quad (1.5)$$

Für die Berechnung des Maximums der Wurfweite (1.5) muss diese Gleichung nach φ abgeleitet werden. Für angenommene Werte $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, $h = 2 \text{ m}$ und $v_0 = 20 \text{ ms}^{-1}$ ergibt sich dabei ein optimaler Winkel von $\varphi = 43,66^\circ$. Um die etwas aufwändige Differentiation zu umgehen, lohnt es sich eine mögliche Vereinfachung vorzunehmen. Mit $h=0$ vereinfacht sich (1.5) zu

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi & \text{Aufreffpunkt} \\ 0 & \text{Abschusspunkt} \end{cases}$$

woraus schließlich abgelesen werden kann, dass sich eine maximale Wurfweite für $\varphi = 45^\circ$ ergibt. Im Vergleich der beiden Werte $43,66^\circ$ und 45° sieht man, dass der von Schüler vielleicht erratene Wert eine akzeptable Näherung ist.

In der Newtonschen Bewegungsgleichung (1.2) wurde neben der Schwerkraft kein weiterer Einfluss angenommen. Bei Versuchen mit verschiedenen Wurfgeschossen erkennt man aber bestimmte Unterschiede in den erzielbaren Weiten. Mit einem Tischtennisball kann nicht so weit geworfen werden wie mit einem Tennisball oder mit einem Schlagball. Im Bereich der Massen eines Tischtennisballs ($\sim 2,5 \text{ g}$) bis zum Schlagball mit ($\sim 80 \text{ g}$) kann geschlossen werden: leichtere Objekte mit ähnli-

1.2 Physikalische Grundlagen

cher Form können weniger weit geworfen werden. Diese Aussage gilt nur im vorhin definierten Massenbereich von ca. 2 bis ca. 80 g, denn beim Kugelstoßen, wo die Kugel einige Kilogramm wiegt, kann natürlich nicht so weit geworfen werden wie beim Schlagballwerfen. Die Beobachtung der unterschiedlichen Wurfweiten lässt darauf schließen, dass die Bewegungsgleichung (1.2) nur eine erste Näherung für den realen Vorgang des schrägen Wurfs ist. Daher muss die Beschreibung der Bewegung des Balls um weitere Kräfte ergänzt werden.

Während des Fluges prallt das fliegende Objekt (Masse M) ständig auf Luftmoleküle mit Masse m . Betrachtet man einen einzelnen Stoß zwischen diesem Objekt mit einem ruhenden Luftmolekül, und nimmt an, dass dieser zentral ist, folgt aus Impuls- und Energieerhaltung die Geschwindigkeit \bar{v}_M, \bar{v}_m der beiden Teilchen nach dem Stoß:

$$\begin{aligned} \text{Impulserhaltung} \quad Mv_M &= M\bar{v}_M + m\bar{v}_m \\ \text{Energieerhaltung} \quad \frac{1}{2}Mv_M^2 &= \frac{1}{2}M\bar{v}_M^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}_m^2 \\ \bar{v}_M = v_M\left(1 - \frac{2m}{m+M}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{für } M = m \\ 0 < \bar{v}_M \leq v_M & \text{für } M > m \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\bar{v}_m = \frac{2v_M}{\frac{m}{M} + 1} = \begin{cases} v_M & \text{für } M = m \\ v_M < \bar{v}_m \leq 2v_M & \text{für } M > m \end{cases} \quad (1.7)$$

Es folgt aus der letzten Beziehung (1.6), dass das fliegende Objekt nach dem Stoß umso langsamer ist, je ähnlicher die beiden Massen sind. Dies erklärt die Beobachtung im Sportunterricht. Der Quotient aus der Masse eines Tischtennisballs und der Masse eines Luftmoleküls ist mit den obigen Werten um einen Faktor 32 kleiner als jener aus Schlagballmasse mit Luftmolekülmasse. Bei jedem Stoß wird der Tischtennisball im Vergleich stärker abgebremst als der Tennisball oder der Schlagball. Der Tischtennisball fliegt bei gleicher Abschussgeschwindigkeit weniger weit als der Schlagball.

1.2.2 Freier Fall mit Luftwiderstand

Im luftleeren Raum fällt jeder Körper gleich schnell. Es wirken außer der Gravitation keine weiteren Kräfte. Auf einen Fallschirmspringer muss eine weitere Kraft wirken, da bekannt ist, dass sich nach einer gewissen Fallzeit und bereits vor dem Öffnen

1.2 Physikalische Grundlagen

des Schirms eine Fallendgeschwindigkeit einstellt. Nach dem Öffnen des Schirmes wirkt eine Kraft entgegengesetzt der Gravitation, die den Fall auf eine gesunde Landegeschwindigkeit bremst.

Das fallende Objekt, zum Beispiel der Fallschirmspringer mit Querschnittsfläche A , bringt nach (1.7) während einer Zeit Δt so viele Teilchen auf mindestens seine eigene Geschwindigkeit v_M , wie in einer Luftsäule mit Volumen $V=A v_M \Delta t$ enthalten sind. Die Zunahme der kinetischen Energie der Luftteilchen muss nach dem Gesetz der Energieerhaltung eine Abnahme ΔE der Gesamtenergie E des fallenden Körpers zur Folge haben. Hat die Luft die Teilchendichte N , so folgt:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \underbrace{N A v_M \Delta t}_{\text{Moleküle/Sekunde}} \underbrace{\frac{1}{2} m v_M^2 M}_{E_{\text{kin, Molekül}}} \\ &= \frac{1}{2} A \varrho v_M^3 \Delta t \quad \text{mit } \varrho = N m \\ \frac{\Delta E}{\Delta t} &= \frac{F \Delta r}{\Delta t} = F v_M = \frac{1}{2} A \varrho v_M^3 \\ F &= \frac{1}{2} A \varrho v_M^2\end{aligned}\tag{1.8}$$

Aus Beobachtungen ist bekannt, dass die Eigenschaften im freien Fall sehr von der Geometrie des Objektes abhängen. Deshalb muss (1.8) durch einen Geometrieskalierungsfaktor ergänzt werden. Dieser wird mit c_w bezeichnet und drückt die Windschlüpfrigkeit der Objektgeometrie aus.

$$F = \frac{1}{2} c_w A \varrho v_M^2\tag{1.9}$$

Die Bewegungsgleichung eines frei fallenden Objekts folgt mit der Luftwiderstandskraft (1.9) in einem Koordinatensystem mit vertikaler y -Achse nach unten, zu

$$M\ddot{y} = Mg - \frac{1}{2} c_w A \varrho \dot{y}^2.$$

Der fallende Körper erreicht nach einer gewissen Zeit die maximale Fallgeschwindigkeit bei $\ddot{y} = 0$, wenn die Luftwiderstandskraft gleich der Gravitationskraft ist. Aus dieser Beziehung lässt sich die Endgeschwindigkeit \dot{y}_{max} beim freien Fall mit Luftwiderstand berechnen.

$$\dot{y}_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2Mg}{c_w A}}$$

1.2 Physikalische Grundlagen

Ein Körper fällt also in Luft bei gleicher Geometrie (bei gleichem c_w) umso schneller je größer der Quotient $\frac{M}{A}$ ist. Ein Fallschirmspringer kann seine Fallgeschwindigkeit

Objekt	Masse	Radius [m]	\dot{y}_{\max} [ms ⁻¹]
Mensch	75kg	0,40	~86
Katze	3,5kg	0,10	~73
Schlagball	80g	0,03	~37
Maus	15g	0,02	~24
Tischtennisball	2,5g	0,02	~10

Tab. 1.1: Beispiele für frei fallende Objekte im luftgefüllten Raum, die als fallende Kugeln mit $c_w = 0,4$ [5, S.239] modelliert sind. Sie erreichen dabei Endgeschwindigkeit \dot{y}_{\max} .

somit durch verschiedene Positionen stark beeinflussen. Beispiele für verschiedene fallende Körper gibt Tabelle 1.1. Dort wurden die fallenden Körper als Kugeln modelliert. Der Fallschirmspringer fällt zum Beispiel mit angehockten Beinen und zusammengekauert. Im Vergleich dazu beträgt die Fallgeschwindigkeit in horizontaler und gestreckter Position ($c_w=1,2$) nur rund 50ms^{-1} .

1.2.3 Hydrodynamische Aspekte

Phänomene strömender Flüssigkeiten und Gase werden in dem Physikteilgebiet Hydrodynamik behandelt [5, S.219]. Fließende Gewässer, Wellen, Wolken, Wind und Regen müssen laut P.Wegener [52, S.57] die ersten naturwissenschaftlichen Beobachtungen gewesen sein. Ohne Kenntnis von Bewässerungseinrichtungen, als erste Anwendung von hydraulischen Überlegungen, hätte die Wandlung zum sesshaften Bauern nicht stattfinden können. Fortschritte in der Hydrodynamik wurden laut [52, S.57] meist durch Versuch und Irrtum gemacht. Moderne Aerodynamik versucht hingegen durch Windkanaltests Modelle, z.B. Autos, Motorradhelme usw., zu optimieren um sie erst dann in die Fertigung zu schicken. Es ist schließlich wirtschaftlicher, Veränderungen an einem Modell durchzuführen, als reale Prototypen nach Tests nicht mehr weiterverwenden zu können.

Flüssigkeiten und Gase können bis zu Fließgeschwindigkeiten kleiner der Schallgeschwindigkeit, trotz um drei Größenordnungen verschiedener Dichten, ähnlich behandelt werden [5, S.225]. Das Ziel der Hydrodynamik ist ähnlich zu jenem in den vorigen Abschnitten 1.2.1 und 1.2.2: Es soll aus Bewegungen von Flüssigkeits- oder

1.2 Physikalische Grundlagen

Gasvolumina auf resultierende Kräfte, und umgekehrt aus bekannten Kräften auf Bewegungen geschlossen werden können. Eine didaktisch wertvolle Demonstration von Fließverhalten stellt z.B. ein Versuch mit Korkstücken auf einer fließenden Flüssigkeitsoberfläche dar. Die Bahnen der Stücke entsprechen jenen Bahnen auf denen sich ein Flüssigkeitsvolumen ΔV bewegt. Diese Bahn wird Stromlinie genannt, muss aber zeitlich nicht konstant sein, das heißt, dass das Strömungsfeld zeitlich nicht stationär ist. Ein nicht stationäres Strömungsfeld stellen die Bewegungen von Wolken während eines Gewitters dar [52, S.60].

Kontinuitätsbedingung

Eine erste interessante Überlegung bezüglich des Fließverhaltens kann erklären, wie sich die Geschwindigkeit \vec{v} aufgrund von veränderlichen Querschnitten zum Beispiel in einer Wasserleitung verhält (Abb.1.2a). Betrachtet wird dazu ein Rohr, das sich entlang seiner Rohrachse verjüngt. Zu Beginn habe es Querschnittsfläche A_1 und fließe mit Geschwindigkeit v_1 , am Ende A_2 und v_2 . Auf eine vektorielle Form der Geschwindigkeit kann hier verzichtet werden, weil \vec{v}_i parallel zu den Flächennormalen der Querschnittsflächen ist. Nun fließt pro Zeiteinheit Δt vorne das Volumen $\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$ hinein und hinten $\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t$ heraus. Da im Rohr keine Masse erzeugt oder vernichtet wird, muss das pro Zeiteinheit transportierte Produkt von Volumen und Dichte in beiden Abschnitten gleich groß sein. Die Dichte kann bei Annahme inkompressibler Flüssigkeiten herausgekürzt werden.

$$A_1 v_1 \rho = A_2 v_2 \rho \quad (1.10)$$

Demnach folgt, dass sich ein Flüssigkeitsteilchen bei kleinerem Querschnitt schneller bewegen muss. Dieses Ergebnis steht im Gegensatz zu Erfahrungen, die im Alltag gemacht werden können. Wird Wasser in einen Trichter eingegossen bildet sich ein Stau, der Wasserspiegel im Trichter steigt. Auf einem Gehsteig wird umso langsamer gegangen, je enger er wird, und auf der Autobahn stockt der Verkehr, wenn eine Fahrspur blockiert ist [52, S.63]. Diese Beobachtung zeigt, dass ein noch nicht beachteter Prozess ablaufen muss, um die Flüssigkeit im Bereich der Verengung zu beschleunigen. Eine Erklärung liefert der folgende Abschnitt.

Bernoulligleichung

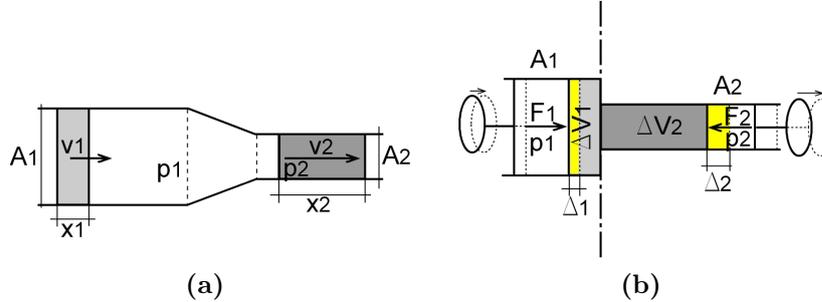


Abb. 1.2: a) und b) Veränderlicher Querschnitt in einer Leitung. Herleitung der Kontinuitäts- und Bernoulligleichung. In b) ist die Bewegung der beiden Kolben links und rechts vom betrachteten Volumen dargestellt.

Ein Volumenelement $\Delta V_1 = A_1 x_1$ eines inkompressiblen Fluids bewegt sich in Abbildung 1.2 von links kommend durch die Verengung in der Rohrleitung. Wie in Gleichung (1.10) beschrieben, muss die Geschwindigkeit im rechten Teil größer sein als im linken. Sonst würde sich wie im Alltag beobachtet ein Stau bilden, weil im Bereich mit kleinerem Querschnitt weniger Volumen pro Zeiteinheit abtransportiert würde als im linken Bereich ankommt. Wie kann die Beschleunigung der Flüssigkeitsteilchen im Übergangsbereich erklärt werden? Die kinetische Energie des Volumenelements ist aufgrund der kleineren Geschwindigkeit im linken Bereich kleiner als im rechten:

$$E_{kin,1} < E_{kin,2} \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 \Delta V_1 < \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Delta V_2$$

In den beiden Gebieten in Abbildung 1.2b herrschen verschiedene Drücke p_1 und p_2 . Die beiden Kolben drücken mit den Kräften F_1 bzw. F_2 in einer Momentaufnahme zu einem beliebigen Zeitpunkt von links und rechts auf das zwischen ihnen liegende inkompressible Fluid, damit das Volumen nicht zerfließt. Druck ist Kraft pro Fläche, also ist $p_1 A_1$ bzw. $p_2 A_2$ gleich den beiden Kräften F_1 bzw. F_2 . Bewegt sich nun der linke Kolben um Δ_1 , muss sich der zweite Kolben um Δ_2 bewegen. Um den oben erwähnten Stau zu vermeiden, muss die Kraft F_1 größer sein als F_2 , denn es muss eine resultierende Kraft geben, die die Beschleunigung der Flüssigkeitsteilchen in der

1.2 Physikalische Grundlagen

Übergangsregion zwischen den beiden Gebieten verursacht. Die Differenz der beiden Kräfte F_1 , F_2 multipliziert mit den Strecken auf denen sie wirken ergibt:

$$p_1 \underbrace{A_1 \Delta_1}_{\Delta V_1} - p_2 \underbrace{A_2 \Delta_2}_{\Delta V_2}$$

Aus der Inkompressibilität folgt, dass ein Volumenelement $\Delta V_1 = A_1 \Delta_1$ das von links gedrückt wird, gleich groß sein muss, wie jenes auf der rechten Seite $\Delta V_2 = A_2 \Delta_2$. Somit folgt $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Die Differenz der beiden Energien $p_1 \Delta V$ und $p_2 \Delta V$ ergibt eine Energiemenge ΔE , die dem System zugeführt wurde. Auf der linken Seite wurde Arbeit verrichtet, der Kolben wurde hineingedrückt, auf der rechten Seite wurde Energie frei. Diese Energiemenge ΔE ist für den Unterschied in den kinetischen Energien in Gleichung (1.11) der beiden Teilbereiche verantwortlich.

$$\Delta E = (p_1 - p_2) \Delta V \quad (1.12)$$

Mit der Interpretation dieser positiven Energieeinheit ΔE als additives Element auf der linken Seite von Gleichung (1.11) kann dort aus der Kleinerrelation eine Äquivalenzrelation werden. Dazu wird das Ergebnis für ΔE zur kinetischen Energie im linken Bereich addiert, und schließlich nach Indizes sortiert:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 \Delta V + p_1 \Delta V = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Delta V + p_2 \Delta V \quad (1.13)$$

Durch diese Sortierung erkennt man, dass die Gesamtenergie in beiden Bereichen gleich groß ist.

Zusätzlich kann anstatt nur die kinetische Energie der Volumen ΔV auch deren potentielle Energie in beiden Abschnitten berücksichtigt werden. Im Falle einer horizontalen Leitung ist diese natürlich auf beiden Seiten gleich groß. Andernfalls wird Gleichung (1.13) durch zwei Terme $\rho \Delta V g z_1$ und $\rho \Delta V g z_2$ ergänzt, wobei die z_i die jeweilige Höhe des Schwerpunkts des Volumenelements bezüglich eines beliebigen Nullniveaus im Potential des Gravitationsfeldes der Erde sind. Damit ergibt sich laut [58, S.382] die Bernoulligleichung:

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho g z_2 + p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{const.} \quad (1.14)$$

1.2 Physikalische Grundlagen

Diese Gleichung kann als die grundlegendste in der Hydrodynamik angesehen werden. Mit ihr können sehr viele Phänomene erklärt werden. Ein Beispiel ist die Abdeckung von Hausdächern bei starken Stürmen. Das Haus stellt eine Verengung der Röhre zwischen Erdoberfläche und oberer Grenze der Luftströmung dar. Oberhalb des Daches muss daher die Luft aufgrund der Gleichung der Massenerhaltung (1.10) eine höhere Fließgeschwindigkeit aufweisen. Mit (1.14) folgt, dass dort ein Druckabfall stattfindet. Unter dem Dach herrscht kurz nach Auffrischen der Windböe noch derselbe Druck wie vorher. Dieser Druckunterschied bewirkt eine resultierende Kraft auf das Dach in Richtung des Druckabfalls nach oben. Bei genügend hohen Windgeschwindigkeiten reicht diese Kraft aus, um das Dach abzuheben [5, S.226].

Laminare Strömungen

In der Bernoulligleichung wird angenommen, dass die Flüssigkeit oder das Gas sich völlig ohne innere Reibungseffekte durch Röhren bewegt. Demnach würde fließender Honig entgegen der Alltagserfahrung gleiches Fließverhalten wie fließendes Wasser zeigen. Neben den physikalischen Eigenschaften Druck und Geschwindigkeit kann eine weitere Größe definiert werden: Viskosität. Honig ist erfahrungsgemäß zäher als Wasser, er hat eine höhere Viskosität [52, S.68]. Wird eine Platte über einen dünnen Wasserfilm gezogen muss sich die oberste Flüssigkeitsschicht, die Grenzschicht, mit derselben Geschwindigkeit bewegen wie die Platte (Abb.1.3a). Die unterste Flüssigkeitsschicht bewegt sich nicht, weil sie mit dem ruhenden Gefäßboden in Berührung ist. Dieser Geschwindigkeitsunterschied wird laut [52, S.96] für kleine Filmdicken h und verschiedene Fluide wie Öl, Wasser und Luft linear über h ausgeglichen. Eine Flüssigkeitsschicht überträgt dabei einen Teil ihres Impulses auf die Nachbarschichten. Die Annahme, dass sich der Flüssigkeitsfilm so verhält als ob viele dünne Schichten übereinander liegen würden, empfiehlt den Begriff der laminaren Strömung (lat. lamina = die Platte). Die Kraft, die nötig ist um die Platte über den Flüssigkeitsfilm zu ziehen, ist ein direkter Indikator für die Viskosität der Flüssigkeit.

Turbulente Strömungen

Tatsächlich wird beobachtet, dass in der Natur häufig Strömungen vorkommen, in denen sich die laminare Eigenschaft auflöst. An ihre Stelle treten zufällige Bewegungen, die turbulent genannt werden. Laminare Strömungen gibt es nach [52, S.72]

1.2 Physikalische Grundlagen

nur bei kleinen Geschwindigkeiten. Der Energieverlust ist in turbulenten Strömungen im Vergleich zu laminaren wesentlich größer. Der Übergang von laminaren zu

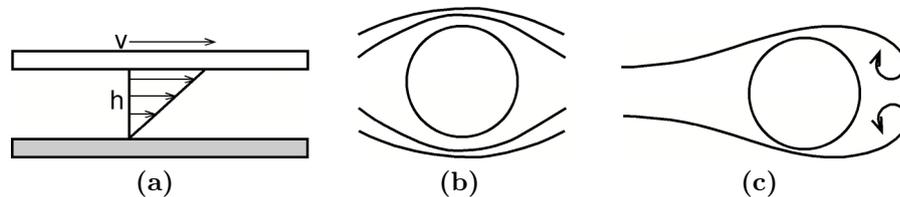


Abb. 1.3: a) Geschwindigkeitsverteilung zwischen zwei Platten b) Laminare Strömung um kreisförmiges Objekt c) Wirbelbildung bei Fließgeschwindigkeit über der Grenzgeschwindigkeit

turbulenten Strömungen wird durch eine gewisse Grenzgeschwindigkeit bestimmt. Wird ein kreisförmiges Objekt von einer Flüssigkeit umflossen, ist vorerst ein laminares Verhalten erkennbar (Abb.1.3b). Ab der Grenzgeschwindigkeit, die von der Geometrie des Objekts und der Viskosität der Flüssigkeit abhängt, entstehen hinter dem Objekt Wirbel (Abb.1.3c)[5, S.233]. Diese werden durch die Viskosität von der strömenden Flüssigkeit mitgenommen. Am Entstehungsort können so neue Wirbel entstehen. Die abgerissenen Wirbel bilden eine „Wirbelstraße“ [5, S.238]. Bemerkenswert erscheint, dass sich die beiden Wirbel an der oberen und unteren Seite (Abb.1.3c) nicht gleichzeitig ablösen. Hinter einem Lastkraftwagen auf der Autobahn können die versetzten Wirbel in der Wirbelstraße gefühlt werden. Die starken Schwankungen im Querwind [5, S.238] rufen ein Hin- und Herschaukeln des eigenen Autos hervor.

Luftstrahl auf schräggestellte Platte

Nach der Einführung und genaueren Betrachtung des schrägen Wurfs in Abschnitt 1.2.1 und der Endgeschwindigkeit des Fallschirmspringers in Abschnitt 1.2.2 kann man sich im Unterricht mit einem weiteren Beispiel befassen. Eine aus einem fahrenden Auto gehaltene Hand wird sowohl entgegengesetzt zur Fahrtrichtung als auch nach oben gedrückt. Wie stark die beiden Effekte sind, hängt von der Form und Stellung der Hand und der Fahrgeschwindigkeit ab. Die gestreckte Hand erfährt wesentlich größere Kräfte als eine zusammengeballte Faust. Wird die gestreckte Hand horizontal aus dem Fenster gehalten, ist nur ein geringer Druck nach hinten und

1.2 Physikalische Grundlagen

kaum einer vertikal nach oben zu spüren. Vergrößert man den Anstellwinkel (den Winkel zwischen Horizontaler und Handfläche), steigt der Einfluss der anhebenden Komponente an, bevor sie bei Winkeln gegen 90° wieder verschwindet. Es kann also gefolgert werden, dass es im Intervall $[0^\circ; 90^\circ]$ ein Maximum der anhebenden Komponente, genannt Lift (engl. Auftrieb) gibt. Die nach hinten drückende Komponente hat bei einem Anstellwinkel von 0° einen gefühlt geringen Wert, bei 90° sicherlich den maximalen Wert. Diese Komponente wird Drag (engl. Widerstand) genannt. Diese beiden Beobachtungen können in einem qualitativen Diagramm (Abb.1.4b) dargestellt werden. Windkanaltests mit einer rechteckigen Platte im Seitenverhältnis 5:1 liefern exakte Messwerte, die in [30] vorgestellt werden, und eine Bestätigung des experimentellen Befundes, den jeder Schüler fühlen kann.

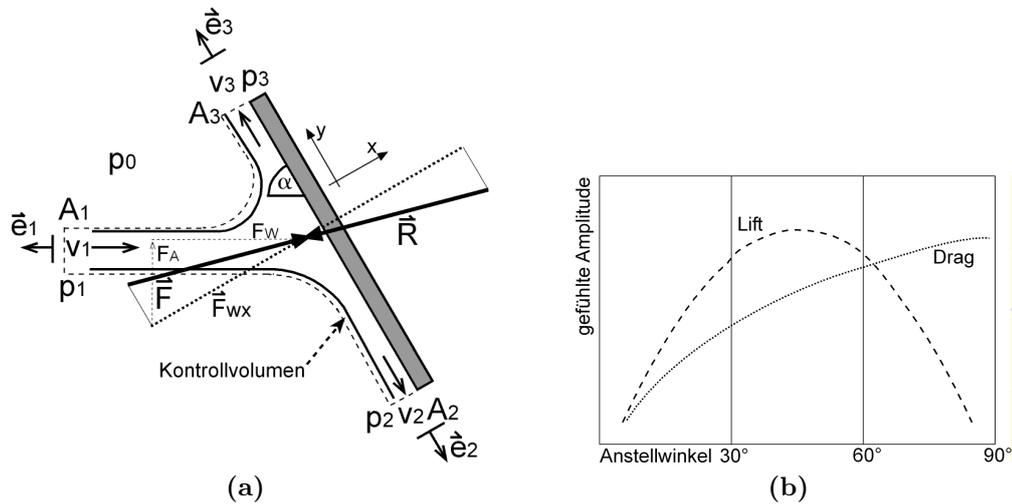


Abb. 1.4: a) Luftstrahl mit Querschnitt A_1 und Geschwindigkeit v_1 auf eine mit α geneigte Platte. b) Während der Autofahrt gefühlte Werte für die Luftwiderstandskraft Drag und die Auftriebskraft Lift.

Eine theoretische Überprüfung dieses Alltagsexperiments wird nun mit Abbildung 1.4a durchgeführt. Trifft ein Freistrah³ auf eine mit α zur Horizontalen geneigte Platte, wird in der theoretischen Behandlung des Phänomens $p_1 = p_2 = p_3 = p_0$ mit p_0 als Umgebungsdruck angenommen [58, S.369]. Das heißt, dass an der Austrittsstelle aus der Düse der Druck der Flüssigkeit gleich dem Umgebungsdruck p_0 ist. Eine überraschende Folgerung daraus ist, dass beim Sandstrahlen⁴ oder beim Was-

³ Freistrah: eine Strömung aus einer kleinen Düse in einen Bereich ohne Eingrenzung.

⁴ Verfahren zur Behandlung von Oberflächen, z.B. vor dem Lackieren

1.2 Physikalische Grundlagen

serstrahlschneiden⁵, zwar damit geworben wird, dass man mit einigen hundert Bar schneidet, in Wahrheit aber der Druck im Strahl genau dem der umgebenden Atmosphäre entspricht. Das Wasserstrahlschneiden nützt den Impuls der Wassermoleküle mit Geschwindigkeiten jenseits der Schallgeschwindigkeit⁶ um Teilchen aus dem zu trennenden Material zu schlagen.

Mit der Näherung, dass sich die potentielle Energie im Gravitationsfeld über den Querschnitt der Anordnung in Abbildung 1.4a nur geringfügig ändert, folgt aus der Bernoulligleichung (1.14) $v_1 = v_2 = v_3 = v$. Die Masse die von links in das System in Abbildung 1.4a fließt, muss durch die beiden einzigen Abflussflächen A_2 und A_3 aus dem System abfließen. Dies liefert mit $\rho v A_1 = \rho v A_2 + \rho v A_3$ einen Zusammenhang zwischen den Strömungsquerschnitten.

Laut [58] kann im zweiten Newtonschen Axiom

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{mit} \quad \vec{p}(t) = \int_{V(t)} \vec{v}(x, y, z, t) \rho(x, y, z, t) dV \quad (1.15)$$

anstelle eines materiellen Volumens $V(t)$ ein raumfestes Kontrollvolumen gewählt werden. Dieses Kontrollvolumen ist in Abbildung 1.4a gestrichelt dargestellt. Die Impulsänderung $\frac{d\vec{p}}{dt}$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Erstens wirkt auf die Teilchen im Kontrollvolumen eine Kraft, die eine Geschwindigkeitsänderung hervorruft und durch das Integral

$$\int_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV \quad (1.16)$$

bestimmt ist. Zweitens tritt Masse durch die Oberfläche S des Kontrollvolumens, was zur Folge hat, dass der Impuls im Inneren verkleinert wird. Ein- und ausströ-

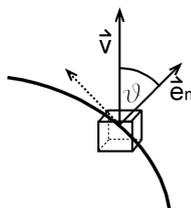


Abb. 1.5: Normalkomponente des Flusses durch die Oberfläche.

mende Masse transportiert pro Flächenelement und Zeiteinheit den Impuls $\mu \vec{v} dS$

⁵ industrielles Schneidverfahren für Stahl und Beton

⁶ siehe www.abz-zierler.at unter Wasserstrahlschneiden, zuletzt 14. April 2008

1.2 Physikalische Grundlagen

(mit $\mu = \rho \vec{v} \vec{e}_n$, \vec{e}_n als Flächennormalvektor und \vec{v} als Strömungsgeschwindigkeit) in das Volumen oder aus dem Kontrollvolumen ab. Die Summe aus einfließendem und abfließendem Fluid ergibt die gesamte Impulsänderung im Kontrollvolumen. Die Umformungen in der nächsten Gleichung (1.17) mit den Bezeichnungen für ϑ als Winkel zwischen \vec{v} und Flächennormalvektor \vec{e}_n nach Abbildung 1.5 zeigen, dass tatsächlich nur jene Impulskomponente berücksichtigt wird, die senkrecht zum Oberflächenelement ist.

$$\mu \vec{v} dS = (\rho \vec{v} \vec{e}_n) \vec{v} dS = (\rho \vec{v} \frac{dS}{dS}) \vec{v} dS = \rho v dS \cos \vartheta \vec{v} = \rho v dS \vec{v} \cos \vartheta \quad (1.17)$$

Das Integral in (1.16) und das Oberflächenintegral über das differentielle Flusselement in (1.17) ergeben addiert die gesamte Impulsänderung im Inneren des Volumens.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV - \oint_s \mu \vec{v} dS \quad (1.18)$$

Diese Form des Impulssatzes erweist sich laut [58, S.321] besonders für stationäre Strömungen, bei denen aus $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ folgt, als sehr hilfreich. Dann müssen sich die beiden Terme auf der rechten Seite in Gleichung (1.18) aufheben.

$$\int_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV = \oint_s \mu \vec{v} dS \quad (1.19)$$

Die linke Seite in der letzten Gleichung (1.19) kann als Resultierende \vec{R} die den Freistrahle umlenkt, also als Umlenkkraft, bezeichnet werden, und komponentenweise für alle drei Teilflächen, durch die die Strömung fließt, berechnet werden.

$$\vec{R} = \oint_s \mu \vec{v} dS$$

Das Oberflächenintegral muss nur an den drei Berandungsflächen A_1 bis A_3 berechnet werden, denn durch die anderen Berandungsflächen des Kontrollvolumens tritt

1.2 Physikalische Grundlagen

kein Fluss. Dann ergibt sich mit den Flächennormalvektoren nach Abbildung 1.4a:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \varrho \vec{v}_1 \vec{e}_1 = -\varrho v_1 = -\varrho v \\
 \mu_2 &= \varrho \vec{v}_2 \vec{e}_2 = \varrho v_2 = \varrho v \\
 \mu_3 &= \varrho \vec{v}_3 \vec{e}_3 = \varrho v_3 = \varrho v \\
 \oint_S \mu \vec{v} dS &= \mu_1 \vec{v}_1 A_1 + \mu_2 \vec{v}_2 A_2 + \mu_3 \vec{v}_3 A_3 \\
 \vec{R} &= -\varrho v A_1 \vec{v}_1 + \varrho v A_2 \vec{v}_2 + \varrho v A_3 \vec{v}_3 \\
 \vec{R} &= -\varrho v^2 A_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} + \varrho v^2 A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \varrho v^2 A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

Die hier ermittelte Kraft \vec{R} ist eine Wirkung der fix montierten schrägen Platte auf den Freistrah. Deshalb wirkt im Gleichgewicht auf die Platte die Kraft $\vec{F} = -\vec{R}$. Nun kann angenommen werden, dass von der Kraft auf die Platte nur die Normalkomponente $F_{w,x}$ wirksam ist, da von einem idealen Prozess ausgegangen wird, bei dem keine Reibung zwischen der Flüssigkeit oder dem Gas mit der Oberfläche der Platte auftritt. Diese Normalkomponente $F_{w,x}$ erhöht die Belastung der Aufhängungslager der schrägen Platte, und ergibt sich aus (1.20).

$$F_{w,x} = \varrho v^2 A_1 \sin \alpha \quad (1.21)$$

Dabei entspricht die Strahlquerschnittsfläche A_1 jener Fläche A , die der ankommende Strahl von der schrägen Platte sieht, also der Projektion der Fläche auf die der Strahl trifft. Wird $F_{w,x}$ in Komponenten entlang und senkrecht zum einfallenden Strahl zerlegt (Abb.1.4a), folgt:

$$F_W = 2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{\varrho v^2}{2} A =: c_W \frac{\varrho v^2}{2} A \quad (1.22)$$

$$F_A = \sin 2\alpha \cdot \frac{\varrho v^2}{2} A =: c_A \frac{\varrho v^2}{2} A \quad (1.23)$$

Dabei entspricht F_W der Kraft in Gleichung (1.9) und der gefühlten Kraft im Schülerexperiment mit der aus dem Auto gehaltenen Hand (Abb.1.4b). Während der Autofahrt wurde „gefühl“, dass die Kraft, die nach hinten drückt, mit größer werdendem Anstellwinkel stärker wird. Dies wird durch $\sin^2 \alpha$ im Widerstandsbeiwert

1.2 Physikalische Grundlagen

c_W mathematisch bestätigt. F_A ist eine Kraft senkrecht zur Strömungsrichtung und entspricht der gefühlten Auftriebskraft. Für diese Komponente wurde im Alltagsexperiment erkannt, dass sie ungefähr bei 45° maximal ist. Die Bestätigung für den experimentell gewonnenen Befund ist durch die Definition von $c_A = \sin 2\alpha$ als Auftriebsbeiwert gegeben.

1.2.4 Bewegungsgleichung des Skispringers

Die Bewegung des Skispringers kann offensichtlich in fünf Phasen unterteilt werden: Anlauf, Absprung, Flugphase, Landung und Auslauf. Über Erfolg oder Misserfolg des Sportlers entscheiden größtenteils die beiden Phasen Absprung und Flugphase. Die perfekte Vollendung eines Sprungs stellt eine ästhetische Landung mit einem Ausfallsschritt, dem Telemark, dar.

Anlauf

Der Anlauf soll laut Projektierungsrichtlinien [12] der FIS⁷ im Seitenriss aus einer nicht steiler als 35° geneigten, möglichst geradlinigen Strecke, einem kreisförmigen Verbindungsstück mit Radius r und dem wiederum geraden um ca. 10° geneigten Schanzentisch bestehen. In der Anlaufspur versucht der Skispringer eine möglichst hohe Endgeschwindigkeit zu erreichen. Die ersten Anfahrtspositionen bestanden aus „nach hinten Absitzen, wobei die Hände die Fußgelenke berührten“ [8, S.21]. Später wurde mit nach vorne gehaltenen Armen angefahren, um sie dann in einer Rückwärtsbewegung an den Körper zu bringen. Heute wird in einer Abfahrtshocke (Abb.1.6), wie sie vom Skifahren bekannt ist, angefahren. Diese Position wird trainingsbegleitend in Windkanaltests kontrolliert und optimiert. Um den Reibungswiderstand zwischen Ski und Schnee möglichst gering zu halten wird der Kunststoffbelag der Skier mit fluorierten Wachsen behandelt [24, S.15].

Die Newtonsche Bewegungsgleichung (1.24) [51, S.303] für den Anlauf, bestehend aus dem geradlinigen und gekrümmten Teil, beinhaltet neben der Schwerkraft und der Reibung \vec{R} noch die Luftwiderstandskraft \vec{F}_d . Mit β als Winkel zwischen Anlaufspur und Horizontaler kann die Bewegungsgleichung geschrieben werden:

$$m \ddot{x} = m g \sin \beta - |\vec{R}| - |\vec{F}_d| \quad (1.24)$$

⁷ Fédération International de Ski

1.2 Physikalische Grundlagen

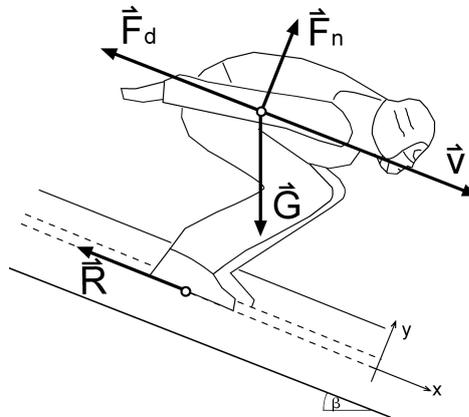


Abb. 1.6: Auf den Springer wirken während der Anfahrt folgende Kräfte: die Gravitation \vec{G} , der Luftwiderstand \vec{F}_d (Drag), eine Normalkraft \vec{F}_n und die Reibungskraft \vec{R}

Die Reibungskraft zwischen Skiern und Schneeoberfläche wird durch den Gleitreibungskoeffizienten μ und die Normalkraft \vec{F}_n bestimmt. Die Normalkraft \vec{F}_n wirkt normal auf die Schanzenbahn und setzt sich aus der Zentripetalkomponente, die im Radius der Anlaufspur wirkt und der Luftauftriebskomponente L zusammen. Letztere kann aber laut [51] für den Anlauf vernachlässigt werden.

$$|\vec{R}| = \mu |F_n| \quad (1.25)$$

$$|F_n| = m g \cos \beta + \frac{m v^2}{r} - L \quad (1.26)$$

Absprung

Der Absprung stellt die Basis eines erfolgreichen Sprunges dar. Er hat dabei laut [56, S.48] zwei Aufgaben zu erfüllen.

- Es soll möglichst rasch von der Anfahrtsposition in eine stabile „Flug“- bzw. Fallposition übergegangen werden. Geschieht dies nicht ideal, resultiert ein Geschwindigkeitsverlust wegen der kurzfristig zu großen Angriffsfläche für die Luftkräfte.
- Beim Absprung wird die Bahnkurve des Körperschwerpunkts angehoben. Die normal auf den nach unten geneigten Schanzenentisch gerichtete Beschleunigung

1.2 Physikalische Grundlagen

auf den Schwerpunkt führt zu einer insgesamt größeren Abfluggeschwindigkeit und hat auf die vertikale Komponente des Geschwindigkeitsvektors einen gewichtigen Einfluss.

Nach den klassischen Windkanaltests zur aerodynamischen Optimierung der Flug- und Anlaufposition wurde der Absprungphase größere Beachtung geschenkt. In der Diplomarbeit von H. Haim [14] werden verschiedene Untersuchungen bezüglich des Absprungverhaltens vorgestellt. Die wichtigen Daten werden aus Messungen mit Druckmessplatten unter der Anlaufspur oder mit Sensoren in den Schuhen der Athleten auf der Schanze oder im Windkanal gewonnen. Besonderes Augenmerk wird auf die Effektivität von Trainingsmethoden gelegt. Es wird vielfach untersucht, ob Imitationssprünge⁸ dem tatsächlichen Absprungverhalten auf der Schanze entsprechen. In [47] werden Ergebnisse bezüglich des Absprungverhaltens in Imitationssprüngen und auf Schanzen dargestellt. Demnach können von dem im Labor gemessenen Absprungpotential nur 72-85% am Schanzentisch umgesetzt werden. Laborsprünge dauern 0,8 s, auf der Schanze hingegen nur 0,25 s bis 0,3 s. Verschiedene Autoren kommen laut H. Haim [14] zu einem ähnlichen Ergebnis: Imitationssprünge unterscheiden sich vom Abspringen auf der Schanze. Aufgrund der Krümmung im mittleren Teil des Anlaufs wirken auf der Schanze viel größere Drücke. In Imitationssprüngen wird ohne die auf der Schanze wirkenden Luftwiderstandskräfte gesprungen. In der Arbeit von H. Schwameder [37] wurde mittels Drucksensoren im Schuh ermittelt, dass bis zum Passieren der Absprungkante der Druck im Zehenbereich stark ansteigt. Vorher ist erhöhter Druck im Fersenbereich feststellbar [49, S.144]. Wenn der Springer

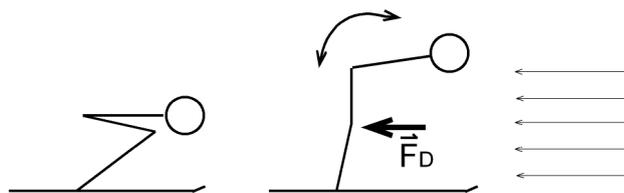


Abb. 1.7: Die Streckung der Knie beginnt vor der Streckung Oberkörper–Oberschenkel. Das untere Körpersegment bietet eine größere Angriffsfläche für die Luftkraft \vec{F}_D als das obere Segment. Es resultiert ein vorwärtsgerichteter Drehimpuls.

⁸ Trainingssprung mit Turnschuhen oder Skispringerstiefeln „auf den Stütz des Partners“ [13, S.9]. Der Springer springt auf seinen Trainingspartner, der ihn dann über seinem Kopf mit gestreckten Armen in nachgeahmter Flugposition hält.

1.2 Physikalische Grundlagen

bei Anlaufgeschwindigkeiten um 20 ms^{-1} nur senkrecht nach oben springt, würde das rückwärtsdrehende Moment starke „Rückenlage“ verursachen, oder im Extremfall den Sportler einen Rückwärtssalto schlagen lassen. Aus der Erfahrung springt der Sportler deshalb nach vorne, er gibt seinem Körper einen vorwärts gerichteten Drehimpuls. Eine komplexe und zeitlich abgestimmte Abfolge von Streckung des Winkels zwischen Unter- und Oberschenkel und Streckung zwischen Oberkörper und Oberschenkel ermöglicht einen solchen Drehimpuls. In Abbildung 1.7 wird gezeigt, wie die Streckung der Beine kurz vor der Vergrößerung des Winkels zwischen Oberkörper und Oberschenkel durchgeführt wird. In diesem Augenblick bilden die Unterschenkel eine größere Angriffsfläche für die Luftwiderstandskraft Drag als das obere Körpersegment. Das untere Körpersegment wird dadurch nach hinten gedrückt, der gesamte Körper erfährt ein Drehmoment nach vorne um den Körperschwerpunkt. Der durch die Kraft Drag und die zeitliche Abfolge der Streckbewegungen erzeugte Drehimpuls muss bis zum Erreichen der idealen Flugposition mit Hilfe der Luftkräfte und durch Veränderung der Winkel zwischen den Körpersegmenten kompensiert werden. Für erfolgreiche Sprünge muss der Übergang in die Flugposition möglichst rasch vor sich gehen [24, S.16].

In Fernsehübertragungen wird der Absprungvorgang oft mit den Worten „der Springer war zu spät dran“ kommentiert. Verständlich erscheint, dass das Timing der Absprungbewegung besonders schwierig ist: „ein [...] Problem für den Springer beim Absprung besteht darin, den zeitlich-örtlichen Verlauf der Absprungbewegung so zu gestalten, dass das Maximum der Absprunggeschwindigkeit zwar noch auf der Schanze, aber zeitlich unmittelbar kurz vor dem Verlassen des Schanzentisches erreicht wird.“ [34, S.10] Leitet der Springer den Absprung zu spät ein, verläuft ein Teil der Streckbewegung der Beine bereits in der Luft und daher ohne Wirkung auf den Geschwindigkeitsvektor, ist er zu früh dran, wird Flugweite gemacht, die in der Bewertung nicht berücksichtigt werden kann, da die Flugweite ab der Schanzentischkante gemessen wird. Die verbleibenden Meter auf der Anlaufspur hätte der Sportler besser in Anlaufhocke verbracht um noch weiter zu beschleunigen. Im Vergleich zum optimalen Absprungzeitpunkt hat der Sportler somit eine geringere Absprunggeschwindigkeit.

1.2 Physikalische Grundlagen

Flugphase

In der Skisprunghistorie ab Seite 3 wurde um 1910 erstmals von einem Gefühl des Fliegens berichtet. Dieses Gefühl trieb die Sportler an, mit verschiedenen Flughäuten aus Stoff zwischen den Armen und dem Körper zu experimentieren [8, S.47]. Laut [8] wurde sogar versucht mit Hilfe der Skistöcke eine Art Tragfläche zu bilden, um aus dem Skispringen ein „Gleitfliegen“ [8, S.48] zu machen. Diese Bestrebungen konnten sich jedoch nicht durchsetzen. Zu Zeiten Sepp Bradls, 1936, wurde wieder mit eng anliegenden Anzügen gesprungen, um windschlüpfrig zu sein.

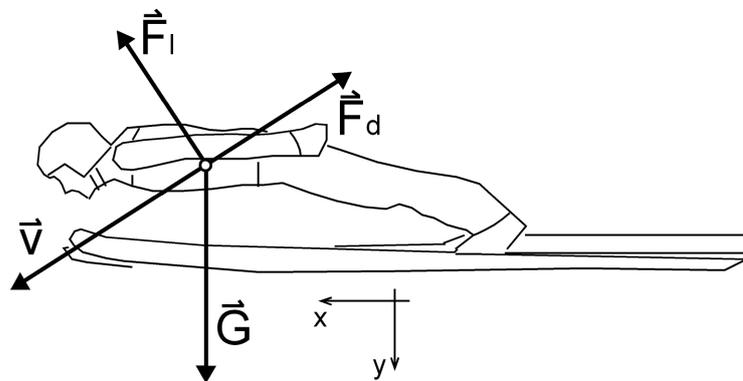


Abb. 1.8: Auf den Springer wirken während der Flugphase Kräfte: die Gravitation, der Luftwiderstand Drag, entgegengesetzt der Bewegungsrichtung und der Auftrieb Lift senkrecht zur Bewegungsrichtung \vec{v} .

Nach dem Absprung wirken auf den Springer nur Gravitation und Luftkräfte. Über die genaue Druckverteilung an verschiedenen Stellen der Skispringerköpers ist noch nicht viel bekannt [33, S.1055]. Die wirkenden Luftkräfte können ähnlich zu den Überlegungen im Beispiel des Luftstrahls auf eine schräge Platte (S.18) angenommen werden und in Komponenten in und senkrecht zur Bewegungsrichtung zerlegt werden, die bremsende Komponente Drag F_d (1.22) und die anhebende Komponente Lift F_l (1.23).

$$F_d = c_d \frac{\rho v^2 A}{2} \quad \text{und} \quad F_l = c_l \frac{\rho v^2 A}{2}$$

Dabei sind c_d und c_l die Luftwiderstandsbeiwerte von Seite 21, ρ die Dichte der Luft, A die Angriffsfläche des Gegenwindes und $v = |\vec{v}|$ der Betrag der Geschwindigkeit der anströmenden Luftmasse. Bei Wind, mit \vec{v}_{wind} , entspricht die Geschwindigkeit des Sportlers \vec{v}_{sp} nicht jener der Luftmasse. Diese ist dann als Differenz zwischen $\vec{v} = \vec{v}_{\text{sp}} - \vec{v}_{\text{wind}}$ definiert [35, S.24]. Wird die Bewegung des Sportlers in einem

1.2 Physikalische Grundlagen

kartesischen Koordinatensystem betrachtet (Abb.1.8), kann die Bewegung mit (1.1) komponentenweise beschrieben werden [43, S.12].

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{G} + \vec{F}_d + \vec{F}_l$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} + F_d \begin{pmatrix} -\frac{v_x}{|\vec{v}|} \\ -\frac{v_y}{|\vec{v}|} \end{pmatrix} + F_l \begin{pmatrix} \frac{v_y}{|\vec{v}|} \\ -\frac{v_x}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}$$

$$\cos \vartheta = \frac{v_x}{|\vec{v}|}$$

$$\sin \vartheta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

$$m \ddot{x} = -\frac{\rho A v^2}{2} (c_d \cos \vartheta - c_l \sin \vartheta) \quad (1.27)$$

$$m \ddot{y} = m g - \frac{\rho A v^2}{2} (c_d \sin \vartheta + c_l \cos \vartheta) \quad (1.28)$$

Hier kann abgelesen werden, dass die Drag- und Liftkomponente entlang der y-Richtung die Bewegung in dieser Richtung behindern. Die x-Komponenten wirken einmal positiv und einmal negativ beschleunigend (bremsend).

Der durch die Absprungbewegung resultierende Drehimpuls wird in der Flugphase durch die nicht im Schwerpunkt angreifenden Luftkräfte und das daraus resultierende Drehmoment \vec{D} kompensiert [35, S.36]. Der Springer kann durch Veränderung seiner Körperhaltung das wirkende Drehmoment beeinflussen. Gelingt ihm dies durch mögliche Winkelveränderung, z.B. zwischen Oberkörper und Beinen, nicht, stürzt er ab. Bei extremen Vorlagen während des Fluges ist die Gefahr eines Absturzes sehr groß, weil geringste Störungen nicht mehr korrigiert werden können. Deshalb wurde nach Windkanaltests eine sicherheitserhöhende Regelung eingeführt: max. 57% der Skilänge sind im Bereich vor der Bindung [33, S.1056]. Diese Einschränkung reduzierte das rückwärts drehende Drehmoment der Luftkräfte, der Skispringer kann sich nicht so extrem weit nach vorne legen.

Mit dem Drehimpulssatz kann eine weitere Gleichung für die Bewegung des Skispringers angegeben werden.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{D} \quad (1.29)$$

1.2 Physikalische Grundlagen

R. Straumann hat die Bewegungsgleichungen (1.27;1.28;1.29) 1927 unter der Annahme, dass $v = \text{const}$ und gleich der Absprunggeschwindigkeit des Springers sei und $\vartheta = 0$ gelöst [43, S.10].

$$x = vt - c_d k (vt)^2, \quad k =: \frac{\rho A}{4m}, \quad y = \frac{1}{2}(g - 2c_1 k v^2)t^2$$

Mit Straumanns Annahmen folgt daraus die Bahngleichung

$$x = v \sqrt{\frac{2y}{g - 2c_1 k v^2}} - \frac{2c_d k v^2}{g - 2c_1 k v^2} y \quad (1.30)$$

J. Thomas [43] bezeichnet Straumanns Annahmen als unzulässig vereinfachend.

A. J. Ward-Smith und D. Clementits zeigen in ihrem Artikel [51], dass die Gleichungen (1.27;1.28) in allgemeiner Form nicht analytisch lösbar sind. Der Grund dafür liegt in der komplexen Verknüpfung der beiden Gleichungen (1.27;1.28), durch ϑ als zeitlicher Änderung der x- und y-Koordinaten, und der Geschwindigkeit v , als $v^2 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}$ definiert. Die Differentialgleichung muss numerisch gelöst werden.

Zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen stehen laut [35, S.24] mehrere Verfahren zur Verfügung. Grundlegend wird dabei davon ausgegangen, dass für eine Differentialgleichung der Form $y' = f(t, y(t))$ die Kenntnis von $y(t_0) = y_0$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch Integration in $y(t_0 + \Delta t)$ übergeführt werden kann. Der Zeitschritt Δt wird dabei Schrittweite genannt.

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t, y(t)) dt$$

In seiner Dissertation [35] unterstreicht B. Schmölzer, dass eine analytische Angabe der Flugbahn nicht möglich sei, weil „[...] turbulente Strömungen nur unter gewissen Annahmen lösbar sind.“, und zitiert [36] in seiner Arbeit [35, S.23]; „[...] Bewegungsgleichungen für Fluide aufgrund chaotischer Bewegung in solchen räumlich gekoppelten nichtlinearen Systemen ein kompliziertes Lösungsverhalten zeigen.“ Schmölzer erarbeitet in [35] mit einem numerischen Computermodell mit Schrittweiten 0,01 s, und vorher durchgeführten Windkanaltests und Feldstudien während der Skiflugweltmeisterschaft 1994 die Auswirkung von veränderten Anfangsbedin-

1.2 Physikalische Grundlagen

gungen oder Parametervariationen auf die Flugbahn. Aus fotografischem Material der Feldstudien wurden typische Flugpositionen erfasst, diese dann im Windkanal nachgestellt und die dabei auftretenden Kräfte und Momente gemessen. Die gemessenen Drehmomente um eine Achse im Hüftbereich liegen je nach Flugposition für einen Springer im Intervall $[3\text{Nm}; 18\text{Nm}]$, für einen anderen im Intervall $[-18\text{Nm}; -3\text{Nm}]$. Diese eklatanten Unterschiede lassen sich auf verschiedene Körpergrößen und Proportionen zurückführen. Der eine Springer muss intuitiv gegen das „Nach-vorne-Fallen“ arbeiten, der andere gegen das „Nach-hinten-Fallen“. Sonst droht ein Absturz. Bei dieser Reaktion verändert der Springer sein Trägheitsmoment. Er verändert die Winkel zwischen Ober- und Unterkörper und die Position der Arme. Interessant erscheint B. Schmölzer und W. Müller in [33], dass Springer trotz sehr ähnlichen Körpergrößen und Proportionen verschiedene Flugpositionen einnehmen.

Das Trägheitsmoment des Systems „Springer+Ski“ wurde um eine Achse entlang des linken und rechten Trochanter major⁹ mit einer Art Drehwaage gemessen, und dann mittels Steinerschen Satzes in Momente um den Körperschwerpunkt umgerechnet. Der Schwerpunkt des Springers wurde mittels eines Modells¹⁰ bestimmt, in dem der Körper in 15 mathematische Körper zerlegt wird. Interessant erscheint Schmölzer folgendes: „Je nach Position des Springers (Armposition, V-Winkel, Körperpositionswinkel [...]) entfernt sich der Schwerpunkt des Systems „Springer+Ski“ mehr oder weniger vom Trochanter major.“ [35, S.22].

Die im Windkanal ermittelten Werte stellen die Basis für das Computermodell dar. Mit diesem „wurde es möglich, verschiedenste Problemstellungen im Bereich des Schisprungs rasch und zuverlässig zu bearbeiten.“ [35, S.106] Dabei stellen „Positionsänderungen des Athleten während des Fluges keine Einschränkung“ [35, S.23] dar.

Durch Unterteilung des Fluges in drei Bereiche konnte B. Schmölzer [35] die Auswirkung von veränderten Flugpositionen auf die Flugweiten berechnen. Eine Veränderung der angreifenden Luftkraft Komponenten (D- und L-Wert) um 5%, durch z.B. Veränderung der Flugposition, führt in dem Modell zu beträchtlichen Verlusten oder Weitengewinnen. Die Effekte können für die drei Flugabschnitte getrennt

⁹ Knochenvorsprung am oberen Ende des Oberschenkelknochens

¹⁰ Hanavanmodell: Der Körper wird aus 15 Elementen, Kugeln, Ellipsoide und Kugelstümpfen modelliert.

1.2 Physikalische Grundlagen

angegeben werden.

Die Erhöhung der Drag Komponente um 5% in allen Phasen des Fluges bewirkt eine Verkürzung der Flugweite. „Die geringste Verringerung der Sprungweite ($l = 159.9$ m) erhielt ich bei einer Vergrößerung des D-Wertes um 5% während des dritten Drittels.“ [35, S.75] Änderungen des L-Wertes um 5% wirken sich für jedes Drittel positiv aus, den Ergebnissen Schmölzers zu Folge [35, S.75] am günstigsten im dritten Drittel des Fluges ($l = 170.2$ m).

Es ist also theoretisch möglich, durch bewusste Variation der Flugposition in verschiedenen Flugphasen die Flugweite bedeutend zu vergrößern. Selbst eine geänderte Armhaltung während des Fluges kann laut den numerischen Ergebnissen [35, S.80] bedeutend Einfluss auf die Flugweite haben ($\Delta l = -2,4$ m ... 2,6 m).

Als Ergebnis präsentiert Schmölzer, dass es „die optimale Flughaltung“ nicht gibt. Ständig muss die Position geändert werden, um optimale Weiten erreichen zu können. Ein Skispringer hat demnach die Differentialgleichungen (1.27;1.28;1.29) völlig verinnerlicht, könnte aber bei Studium der theoretischen Resultate in gewissen Flugphasen anders reagieren und dadurch weiter springen.

Vielfach wird angenommen, dass sich der Skispringer ähnlich verhält wie eine Tragfläche. Dem ist laut [24] nicht so. Eine Tragfläche ist für kleine Winkel zwischen Tragfläche und Horizontaler konzipiert. Der Skispringer bewegt sich hingegen mit Anstellwinkeln um 50° , ein Bereich den ein Pilot „tunlichst vermeiden muss,[...] weil es dort zum Zusammenbruch der Auftriebskräfte kommt.“ [24, S.18] Das Verhältnis der Auftriebskraft zur Widerstandskraft ist bei einem Skispringer nur wenig größer als eins, bei einer Tragfläche aber $50 : 1$. Allgemein ist die Form eines Skispringers mit seiner Ausrüstung nicht mit der aerodynamisch optimalen Form einer Tragfläche zu vergleichen. Laut W. Müller [24, S.18] erreichen die Luftkräfte beim Skifliegen ungefähr die Größenordnung der Gewichtskraft.

Aus dem Vergleich des Quotienten aus angenommen konstanter Luftkraft Lift F_1 und Gewichtskraft für verschieden schwere aber sonst gleich ausgerüstete Springer mit 60 bzw. 65 kg

$$\frac{F_1}{60 \text{ kg } 9,81 \text{ ms}^{-2}} > \frac{F_1}{65 \text{ kg } 9,81 \text{ ms}^{-2}}$$

kann geschlossen werden, dass bei einem leichteren Springer die Luftkräfte größere Wirkung zeigen als bei einem schwereren Springer. Nur mittels der Luftkräfte kann

1.2 Physikalische Grundlagen

der Springer gegen die Gravitation in der y-Komponente der Differentialgleichung seiner Bewegung (1.28) den Sprung verlängern. Es ist daher verständlich, dass der Sportler umso erfolgreicher ist, je ähnlicher die Beträge der beteiligten Kräfte sind. Beim Fliegen müssen die Luftkräfte betragsmäßig sogar größer sein als die Gravitation, um nach dem Abheben in die gewünschte Flughöhe zu gelangen. Aufgrund der Vorteile von geringem Gewicht breiteten sich unter den Springern Essstörungen aus. Sie hungerten um erfolgreich zu sein, einige setzten ihren Körper sehr zu. Mit einem neuen Reglement wurde diesem Trend entgegengewirkt. Der Body-Mass-Index ist ein Wert, der aus der Masse und der Körpergröße des Springers berechnet wird.

$$\text{BMI} = \frac{\text{Masse}}{\text{Körpergröße}^2}$$

Menschen mit normalem Gewicht haben BMI-Werte zwischen 20 und 25 kgm^{-2} , die neun besten Skispringer bei den olympischen Spielen 2002 in Salt Lake City hatten Werte zwischen 17,4 und 20,2 kgm^{-2} [33, S.1060]. Um der Tendenz zu extrem untergewichtigen Sportlern entgegenzuwirken, wurde ein Reglement eingeführt, wonach die Skilänge mit dem BMI verknüpft ist. Bereits vorher wurde die vordere Skilänge, die Länge zwischen Bindung und Skispitze, wegen extremen und daher sehr gefährlichen Vorlagen in der Flugphase auf 57% limitiert [33, S.1056]. Extreme Vorlagen vergrößern zwar die Luftkräfte, bergen jedoch die Gefahr sehr gefährlicher Stürze bei kleinsten Störungen. Längere Ski vergrößern mit längeren Vorderskilängen die Luftkräfte und bringen daher Wettkampfvorteile. Hier greift das BMI Reglement. Mit dem eingeführten Reglement wird die Skilänge aus der Körpergröße berechnet, wobei die Körpergröße mit Werten zwischen 1,38 und 1,46 multipliziert wird um die Skilänge zu erhalten. Ein größerer BMI erlaubt bei gleicher Körpergröße längere Ski [25]. Viele Springer mussten nach Einführung dieser Regel zunehmen um die BMI Untergrenze von 18 kgm^{-2} zu erreichen. Dies hatte für ihre Wettkampfleistung schwerwiegende Folgen. Denn um den BMI um einen Punkt zu erhöhen muss ein Springer mit Körpergröße 1,78 m 3,17 kg zunehmen. Diese Erhöhung führt laut den Berechnungen von [33, S.1063] bei gleichbleibender Ausrüstung zu einem Weitenverlust von 2,5 m, obwohl eine höhere Absprunggeschwindigkeit erreicht werden kann.

1.2 Physikalische Grundlagen

Landung

Je nach Sprungweite wirken bei der Landung laut den numerischen Berechnungen in [35, S.83], [8, S.66] und [26, S.41] Kräfte wie bei einem freien Fall aus einer Höhe zwischen 0,75 m und 3,5 m. Laut [26, S.47] ist die Landung über einen großen Bereich des Aufsprunghügels mit einem Sprung aus einer Höhe von ungefähr einem halben Meter vergleichbar, weil die Flugbahn des Springers fast parallel zum Aufsprunghügel ist. Die größte äquivalente Fallhöhe tritt bei Weiten jenseits der Konstruktionsweite der Schanzenanlage auf. Dort wird es für den Skispringer schwierig mit den wirkenden Kräften umzugehen. Grundsätzlich soll die Landung in der Telemarkposition, einem Ausfallschritt, stattfinden. Das heißt, dass das hintere Knie auf Höhe des vorderen Sprunggelenks geht. Die Ästhetik der Landung beeinflusst die Benotung des Sprunges. Überspringt der Sportler die Konstruktionsweite um mehrere Meter, gelingt ihm die Telemarkposition nicht mehr, der Sportler setzt ein „Kacherl“. Dabei sind beide Sprunggelenke auf gleicher Höhe. Große Weiten bringen einerseits eine gute Bewertung, sind aber andererseits für den Sportler überaus gefährlich.

2 Messsystem

Das installierte Messsystem soll die experimentelle Bestimmung der Flugbahn des Skispringers ermöglichen. Es besteht aus fünf Kameras, welche auf dem Bergisela-real entlang des Aufsprunghügels fix installiert sind. Mittels 2D-Bildkoordinaten aus den Kameraaufnahmen, z.B. Schwerpunkt des Skispringers, soll auf Koordinaten in einem 3D Koordinatensystem geschlossen werden. Dafür werden die 3D-Koordinaten einiger Punkte im Hintergrund der Aufnahmen in einem übergeordneten 3D-Koordinatensystem benötigt. Diese Punkte werden im Folgenden als Passpunkte oder Landmarker bezeichnet und in der Natur mit Neonmarkern gekennzeichnet. Auf der Genauigkeit ihrer Koordinaten basieren sämtliche spätere Berechnungen. Die Passpunktkoordinaten wurden mit einem Tachymeter, das ist ein Theodolit mit integrierter Entfernungsmessung, vermessen und mit neonfarbenem Klebestreifen markiert. Ein Tachymeter misst Horizontal- und Vertikalwinkel in Gon (=Neugrad¹) und die Entfernung zum Zielobjekt in Metern. Somit werden Koordinaten in einem Kugelkoordinatensystem mit Ursprung im Schnittpunkt der drei Tachymeterachsen (Abb.2.1a) ermittelt.

Bei einer Vermessung wird ein Tripelspiegel, genannt Prisma, auf den zu vermessenden Punkt gehalten. Das Tachymeter strahlt einen Laserstrahl auf den aus drei orthogonal angeordneten Spiegeln bestehenden Tripelspiegel. Durch diese Anordnung wird der einfallende Strahl parallel reflektiert. Aus Phasendifferenz oder Impulslaufzeit zwischen gesendetem und empfangenem Laserstrahl kann das Gerät die Entfernung bestimmen. Insgesamt wurden vierzig Punkte vermessen (Abb.2.2), darunter eine Auswahl von Passpunkten, die Form des Aufsprunghügels entlang der Leitplanken an zwölf Positionen, die Absprungkante am Schanzentisch an zwei Punkten und schließlich die Position der vier Kameragehäuse.

Die Kugelkoordinaten aus der Vermessung mit Standort des Tachymeters am rech-

¹ $360^\circ = 400\text{gon} = 2\pi$

² Diese Abbildung stammt aus Wikimedia Commons.

2 Messsystem

ten Sprunghügelrand, müssen in ein Kartesisches Koordinatensystem mit folgenden Eigenschaften transformiert werden.

- Der Ursprung liegt in der Mitte der Anlaufspur an der Absprungkante
- Ein unbeeinträchtiger, idealer Flug findet in der xz -Ebene statt
- Die z -Achse verläuft vertikal

Ein Koordinatensystem mit diesen Eigenschaften wird später übergeordnetes Weltkoordinatensystem genannt.

Damit wurde die Basis für die 3D Rekonstruktion geschaffen, wo aus der Kenntnis von zwei- und dreidimensionaler Koordinaten von Passpunkten auf die Abbildungsvorschrift $3D \rightarrow 2D$ geschlossen wird. Zuerst wird dabei die Abbildung vom übergeordneten kartesischen Koordinatensystem (KS) in ein untergeordnetes kartesisches Koordinatensystem der Kamera, welches um die optische Achse ihres Linsensystems generiert wird, ermittelt. Die folgende Abbildung vom 3D Kamerasystem in ein 2D Bildkoordinatensystem kann im Idealfall als Zentralprojektion modelliert werden, die genauen Eigenschaften (S.72) werden aber in einem Laborversuch (Abb.2.27, S.73) ermittelt. Wenn die Abbildungsvorschrift aller Hintereinanderausführungen der beteiligten Abbildungen bekannt ist, können die realen dreidimensionalen Koordinaten von beliebigen 2D-Punkten berechnet werden.

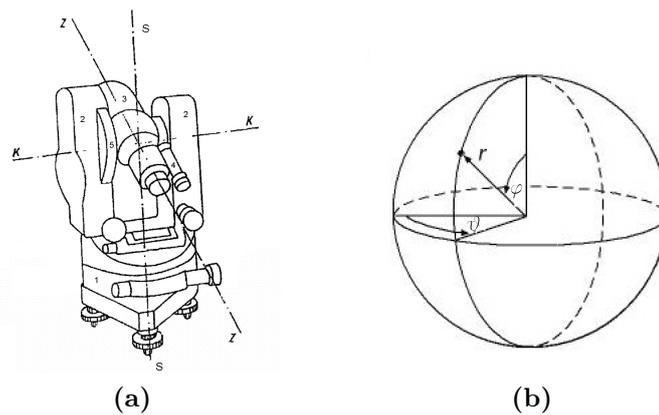


Abb. 2.1: ²a) Die drei Achsen eines Tachymeters: Achse S steht vertikal, Achse K ist horizontal und Achse Z ist auf das Zielobjekt gerichtet, b) Bezeichnungen in einem Kugelkoordinatensystem

2.1 Messanordnung

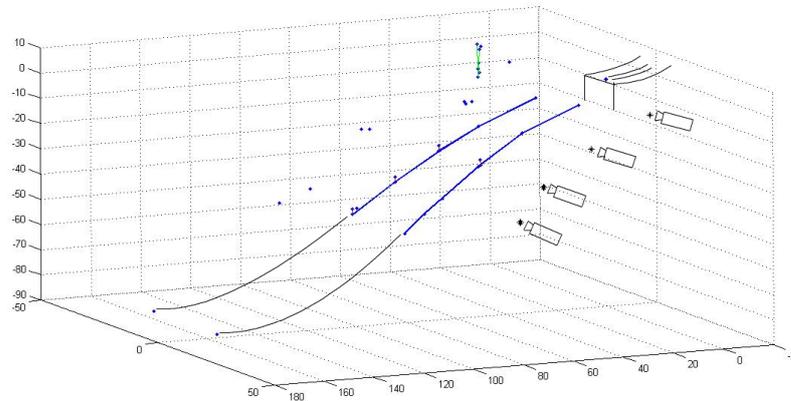


Abb. 2.2: Punktmessmodell in Metern der am Bergiselareal vermessenen Punkte. Die vier Kameras sind vom Springer linksseitig entlang des Sprunghügels, welcher durch die Linien angedeutet ist, angebracht. Rechts vom Springer befinden sich die meisten der für die Rekonstruktion benötigten Passpunkte.

2.1 Messanordnung

Am Gelände der Bergisel Schanze wurden im Zuge der Vorbereitungen insgesamt sechs Hochgeschwindigkeitskameras installiert. Zwei Kameras nehmen je 90 Bilder von der Absprunghase auf. Vier weitere sind westseitig entlang des Sprunghügels montiert. Jede dieser Kameras vom Typ LightWise LG-1.3-G-1394 (Anhang E) ist mit einem einzelnen Rechner verbunden. Gesteuert werden diese Rechner mittels Netzwerk vom Büro unterhalb des Schanzentischs. Die Kameras können mit einer Frame Rate von 30fps (frames per second) Bilder mit einer Auflösung von 1280x1024 Punkten aufzeichnen. Die Sensorgröße ist nach Datenblatt E im Anhang 6,7x6,7 μ m.

2.1.1 Kamera 1

Die erste Kamera ist auf einem Baum in einer Höhe von ca. 5 Metern montiert. Sie zeichnet während der ersten Flugphase auf. Im Hintergrund wurden vorerst vier Punkte mit neonfarbenen Klebestreifen auf 4,5x4,5cm Metallbeilagscheiben markiert (Abb.2.3). Leider stellte sich später heraus, dass ein Punkt durch einen schneebelasteten Ast verdeckt wurde.

2.1 Messanordnung



Abb. 2.3: Bildausschnitt von Kamera 1 mit den markierten Punkten im Hintergrund. Die quadratischen Marker wurden auf drei Bäumen angebracht.

2.1.2 Kamera 2

Die zweite Kamera beobachtet die zweite Flugphase. Als Landmarker wurden die drei Ecken der Stahlkonstruktion (Abb.2.4) an der Mittelstation des Bergisel Liftes ausgewählt. Die Kamera selbst ist auf der Stahlkonstruktion des ersten Stocks des Reporterturms befestigt.

2.1.3 Kamera 3

Kamera 3 ist wie Kamera 2 an einem horizontalen Steher der Konstruktion in einer Höhe von ca. 5 Metern fix montiert. Sie beobachtet die dritte Flugphase mit vier vermessenen Punkten im Hintergrund (Abb.2.5). Zwei Passpunkte sind als die oberen Enden der Stahlprofilstäbe im Bildausschnitt definiert. Durch händisches Abmessen der vertikalen Stäbe konnten durch Reduktion deren z -Koordinate zwei weitere Punkte zur Passpunktliste hinzugefügt werden.

2.1 Messanordnung



Abb. 2.4: Bildausschnitt von Kamera 2. Die Passpunkte wurden als Ecken der Metallkonstruktion an der Mittelstation des Bergisel Liftes definiert.

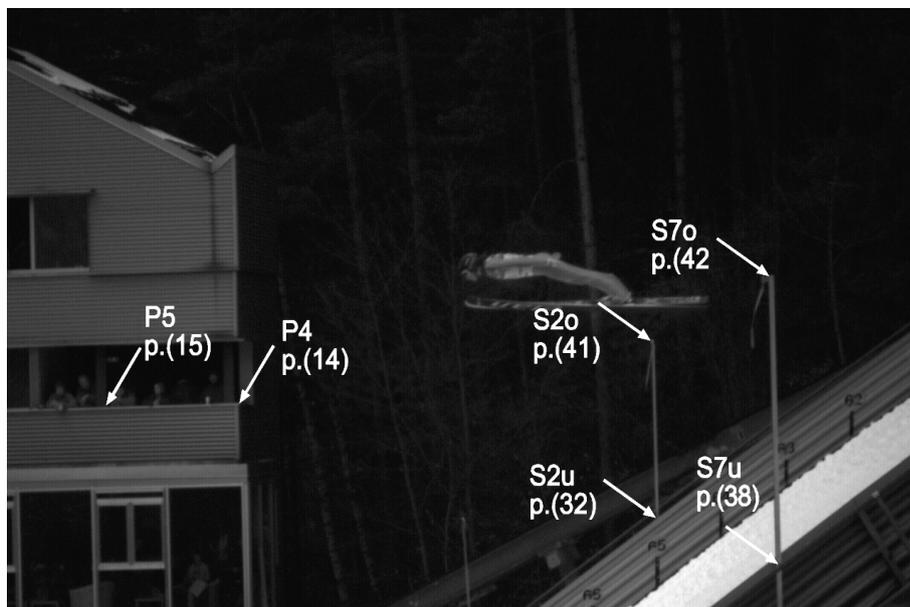


Abb. 2.5: Bildausschnitt von Kamera 3. Die Passpunkte wurde als markante Ecken auf dem Gebäude im Hintergrund und als die gekennzeichneten Punkte an den vertikalen Stahlprofilstäben definiert.

2.1 Messanordnung

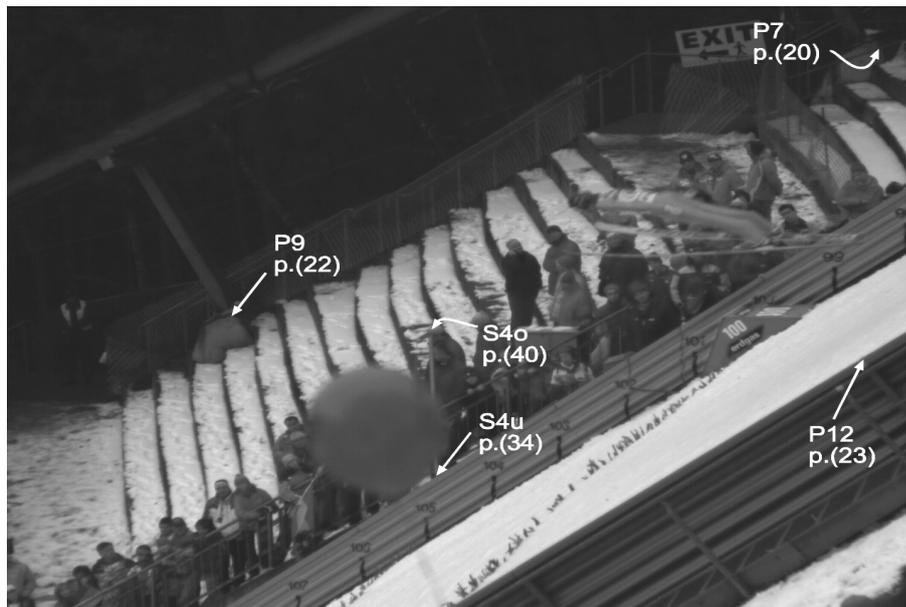


Abb. 2.6: Bildausschnitt von Kamera 4

2.1.4 Kamera 4

Die vierte Kamera zeichnet den letzten Flugabschnitt auf. Sie ist wie Kamera 1 auf einem Baum ungefähr gleich hoch montiert. Im Hintergrund wurden vier Punkte vermessen (Abb.2.6). Ein Punkt konnte wieder durch Abmessen einer Länge hinzugefügt werden. Beim Wettbewerb stellte sich heraus, dass ein Punkt nicht verwendet werden kann, weil das Objekt durch einen entfernten Teil der Leitplanken verdeckt wurde. Durch diese Lücke in der Beplankung besteigen die präparierenden Skiläufer den Aufsprunghügel.

2.1.5 Kamera 5

Für die Skisprung Veranstaltung auf der Bergiselschanze im Jänner 2007 konnte eine fünfte Kamera nach technischen Problemen nicht rechtzeitig montiert werden. Deshalb wurde eine handelsübliche digitale Videokamera zur Erfassung des Landepunkts des Skispringers verwendet (Abb.2.7). Durch Absprungpunkt und Landepunkt wird die vertikale Sprungebene definiert (Abb.2.11b S.49).

2.1 Messanordnung

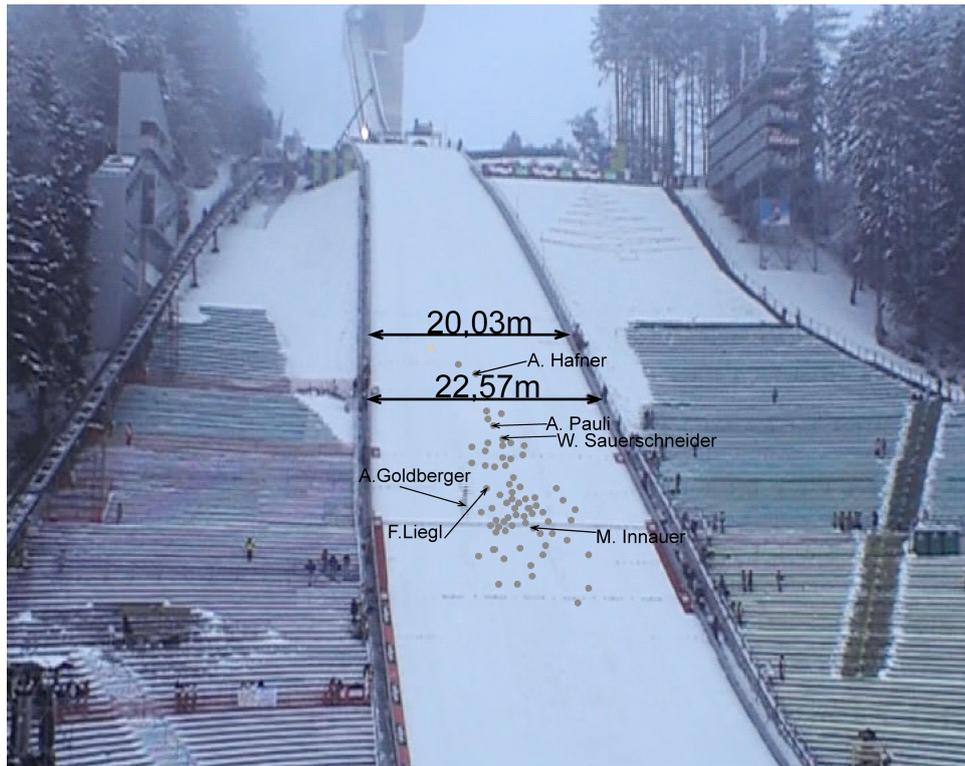


Abb. 2.7: Mit Kamera 5 wurden die Landepunkte für die Definition der vertikalen Sprungebene aufgezeichnet. Hier sind exemplarisch einige Landepunkte identifiziert. Als Größenordnung ist die Breite des Aufsprunghügels angegeben.

2.2 Vermessung

Ende November 2006 wurde mit einem Tachymeter die Vermessung der vorher ausgewählten und markierten Passpunkte durchgeführt. Das handgeschriebene Protokoll im Anhang C beinhaltet neben den gemessenen Daten zusätzlich Hilfsskizzen zur nachträglichen Nachvollziehbarkeit. Für jede Kamera wurden Punkte im Bildbereich ausgewählt. Dabei wurde darauf geachtet, dass sie auch bei schlechten Lichtverhältnissen oder Schneefall im Bild leicht identifizierbar sind. Denn alle weiteren Berechnungen basieren auf der Korrektheit der Koordinaten der Landmarker sowohl im Weltkoordinatensystem als auch im Bildkoordinatensystem. Die Daten des Tachymeters, im Anhang B und C, werden über die Beziehungen in (2.4) in kartesische Koordinaten übergeführt. Hervorzuheben ist, dass zwei Punkte, P24 und P25 der ersten Kamera (Abb.2.3) nicht vollständig vermessen werden konnten. Die Entfernung vom Tachymeter zu den beiden Passpunkten konnte nicht gemessen werden, weil es den Vermessungsassistenten nicht gelang, an die markierte Stelle an den Bäumen hochzuklettern. Ein Kletterer hatte vorher die neongelbe Markierung dort angebracht. Alternativ wurden je zwei erreichbare Punkte, P_{mitte} , P_{unten} weiter unten an den beiden Bäumen vermessen, durch welche eine Gerade g_1 gelegt wurde, die die Achse des Baumes repräsentieren soll. Die Parameterform der Geraden g_1 , mit den Bezeichnungen nach Abbildung 2.8, \vec{P}_{mitte} als oberen der beiden erreichbaren Punkte und $\vec{a} = \vec{P}_{\text{mitte}} - \vec{P}_{\text{unten}}$ lautet:

$$g_1 : \vec{x} = \vec{P}_{\text{mitte}} + \lambda \vec{a}$$

Der nicht erreichbare Punkt P_{oben} liegt sowohl auf der Geraden g_1 als auch auf dem Messstrahl

$$g_2 : \vec{x} = r \vec{b}$$

des Tachymeters, der \vec{b} als Einheitsvektor des Richtungsvektor hat und durch den Ursprung des Koordinatensystems der Vermessung läuft. Die Koordinaten von \vec{b} werden aus den gemessenen Werten für den Horizontal- bzw. Vertikalwinkel (ϑ bzw. φ) berechnet. Als Parameter der so gewonnenen Gerade g_2 wurde r gewählt wurde. Unter idealen Messbedingungen würde der Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1 \cap g_2$ gerade P_{oben} sein. Aufgrund von Messungenauigkeiten verlaufen die beiden Geraden aber windschief zueinander.

2.2 Vermessung

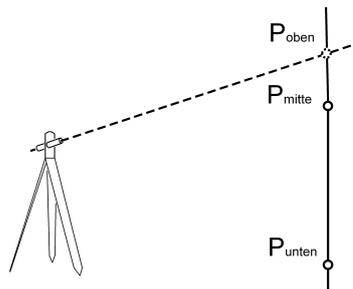


Abb. 2.8: Unzugänglicher Punkt P_{oben} , dessen Koordinaten mittels Näherungsverfahren bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 g_1 \cap g_2 : \vec{P}_{\text{mitte}} &= r \vec{b} - \lambda \vec{a} \\
 &= r \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) & -a_1 \\ \sin(\vartheta) \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) & -a_2 \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \lambda \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Was vereinfacht angeschrieben werden kann als:

$$\vec{P} = A\vec{c} \tag{2.1}$$

Im Allgemeinen gibt es für überbestimmte Gleichungssysteme wie in (2.1) keine exakte Lösung für r und λ . Es muss jenes r bzw. λ gefunden werden, für die der Abstand zwischen den beiden Geraden minimal wird. Das Ergebnis für r würde dabei der nicht messbaren Entfernung von \vec{P}_{oben} entsprechen. Eine Lösungsmethode für überbestimmte Gleichungssysteme wurde von C. F. Gauß 1794 entdeckt. Ihm gelang es mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die weitere Sichtung eines vermeintlich neuen Planeten, Ceres, zu ermöglichen.

Gauß hatte ein Problem folgender Art zu lösen. In einem Experiment werden Wertpaare (x_i, y_i) gemessen. Nun soll aufgrund von den Messergebnissen eine Funk-

2.2 Vermessung

tion f bestimmt werden, für die gilt $y = f(x)$. Für f könnte beispielsweise

$$f(x) = \alpha + \beta x$$

angesetzt werden. Die Parameter α, β sind so zu bestimmen, dass die Funktion die gemessenen Punktepaare möglichst genau beschreibt. Der Ansatz von Gauß war, dass die Summe der Absolutbeträge der Abstände in den y -Werten minimal sein soll:

$$\sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)| \rightarrow \text{minimal!}$$

Die Betragsfunktion sollte wegen späterer Differentiation [27, S.3] durch Quadrieren zu

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \text{minimal!}$$

umgangen werden. Für jedes gemessene Wertepaar kann die Differenz $\Delta y_i = f(x_i) - y_i$ angeschrieben werden als:

$$f(x_i) - y_i = \alpha + \beta x_i - y_i$$

oder für eine umfangreiche Messserie mit n Wertepaaren:

$$\begin{pmatrix} f(x_1) - y_1 \\ \vdots \\ f(x_n) - y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_X - \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_B. \quad (2.2)$$

Für zwei Messwerte $(y_i, y_j) : i \neq j$ wäre die Anpassung von $f(x_i)$ an die Messwerte y_i genau dann perfekt, wenn auf der rechten Seite ein Nullvektor steht. Dies gilt für

$$AX = B \quad (2.3)$$

Für eine umfangreiche Messserie mit n Wertewerten (y_1, \dots, y_n) ist $AX = B$ überbestimmt und im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar. In diesem Fall muss X so bestimmt werden, dass $|AX - B|$ minimal wird. Matlab bietet für die Lösung eines solchen Problems den Befehl:

2.2 Vermessung

„\ Backslash or matrix left division.

If A is a square matrix, $A \setminus B$ is roughly the same as $\text{inv}(A) * B$, except it is computed in a different way. If A is an n -by- n matrix and B is a column vector with n components, or a matrix with several such columns, then $X = A \setminus B$ is the solution to the equation $AX = B$ computed by Gaussian elimination (see Algorithm for details). A warning message is displayed if A is badly scaled or nearly singular.

If A is an m -by- n matrix with $m \sim n$ and B is a column vector with m components, or a matrix with several such columns, then $X = A \setminus B$ is the solution in the least squares sense to the under- or overdetermined system of equations $AX = B$. The effective rank, k , of A is determined from the QR decomposition with pivoting (see “Algorithm“ for details). A solution X is computed that has at most k nonzero components per column[...]³

Demnach kann

$$\vec{c} = A \setminus \vec{P}$$

für Gleichung (2.1) verwendet werden und liefert das optimale r für die nicht vollständig vermessbaren Punkte P24 und P25.

2.2.1 Fehler der Vermessung

Die erste Überlegung bezüglich der zu erreichenden Genauigkeit betrifft die Exaktheit des Vermessungsvorganges. Üblicherweise beträgt die Standardabweichung für die Distanzmessung mit einem Tachymeter $1\text{mm} + 1\text{ppm}^4$. Die Entfernungen, die auf der Bergisel Schanze gemessen wurden, befinden sich wie in Anhang C ersichtlich im Intervall $[3, 343\text{m}; 145, 625\text{m}]$. Die Standardabweichung der Winkelmessung mit einem Tachymeter darf nach DIN 18723 [7] sowohl für den Horizontal- als auch den Vertikalwinkel nicht größer als $0,15\text{mgon}^5$ betragen.

Die gemessenen Daten beschreiben die Punkte in einem Kugelkoordinatensystem.

³ Auszug aus der Matlab Hilfe unter „Arithmetic Operators + - * / \ ^ ~“

⁴ ppm = part per million

⁵ milligon = $\frac{1}{1000} \frac{2\pi}{400}$

2.2 Vermessung

Daraus werden die kartesischen Koordinaten über folgende Beziehungen berechnet.

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) \\y &= r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\z &= r \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Eine Messung ist immer mit Fehlern behaftet. Interessant ist, wie sich einzelne Fehler auf eine Größe G , die von mehreren Messwerten abhängt auswirken.

$$G = G(x, y, z, \dots)$$

Eine weitere Methode, die auf C.F. Gauß zurückzuführen ist kann eine Antwort liefern. Zur Berechnung der Standardabweichung der Größe wird das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz [45] verwendet.

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + \dots}\tag{2.5}$$

Bei der Berechnung der Kartesischen Koordinaten aus den gemessenen Kugelkoordinaten wird dieses Fortpflanzungsgesetz verwendet. Ableiten der Gleichungen (2.4) nach φ , ϑ und r führt auf folgende Fehler für jede kartesische Koordinate.

$$\begin{aligned}dx &= \sqrt{\sin^2(\varphi) \cos^2(\vartheta) dr^2 + r^2 \cos^2(\varphi) \cos^2(\vartheta) d\varphi^2 + r^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) d\vartheta^2} \\dy &= \sqrt{\sin^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) dr^2 + r^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + r^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\vartheta) d\vartheta^2} \\dz &= \sqrt{\cos^2(\vartheta) dr^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\vartheta^2}\end{aligned}$$

Die Fehler der vermessenen Koordinaten befinden sich in folgenden Intervallen mit Mittelwert und Standardabweichung:

$$\begin{aligned}[0; 0,0185] &\ni dx = (0,0041 \pm 0,0036)\text{m} \\[0; 0,0188] &\ni dy = (0,0043 \pm 0,0035)\text{m} \\[0; 0,0216] &\ni dz = (0,0044 \pm 0,0044)\text{m}\end{aligned}$$

2.3 3D Rekonstruktion

Dabei ist die große Intervalllänge auf Ausreißer zurückzuführen, die sehr weit weg am unteren Ende des Sprunghügels liegen.

Wie bereits erwähnt, wird bei der Vermessung ein Reflektor, Prisma, an die Position des Punktes gehalten. Es wird dabei tatsächlich ein mathematischer Punkt vermessen. Wo dieser Punkt auf den Markierungen auf den Bäumen oder den Ecken diverser Konstruktionen, wie zum Beispiel bei Kamera 2 (S.36), genau liegt, ist eine durchaus interessante Fragestellung. Die Passpunkte besitzen auf den Bildern Ausdehnungen über mehrere Pixel. Die auf den Bäumen angebrachten Marker haben zum Beispiel Abmessungen von ca. 4,5x4,5cm. Natürlich wurde das Prisma dabei so exakt wie möglich im Mittelpunkt der Quadrate positioniert. Trotzdem kann davon ausgegangen werden, dass der Fehler der Vermessung von < 5 mm gegenüber der Positionierungsungenauigkeit vernachlässigbar ist.

2.3 3D Rekonstruktion

Ein großer Anwendungsbereich der Bildverarbeitung beschäftigt sich damit, aus 2D Koordinaten räumliche Information zu gewinnen. Begonnen haben diese Bestrebungen mit der Rekonstruktion von Geländeformen aus orthographischen Aufnahmen. Dabei wurden sehr ausgeklügelte optische Geräte verwendet. Heute hat das Interesse an 3D Informationen aus Bildern einen sehr hohen Stellenwert. In der Medizin, in der Robotik und im Baugewerbe kommt es sehr auf die Kenntnis der Lage, der Form und der Orientierung von Objekten an. Auch im Hochleistungssport wird mit aus Bildmaterial gewonnenen Daten gearbeitet und geforscht.

Die Basis einer 3D Rekonstruktion bildet die Kenntnis zwei- bzw. dreidimensionaler Koordinaten von Passpunkten. Die Passpunkte werden im Vorfeld geodätisch vermessen und ihre Koordinaten in dem übergeordneten drei dimensional Koordinatensystem definiert. Die zweidimensionalen Koordinaten sind in einem Bildkoordinatensystem definiert, z.B. als Pixeladressen.

Die Funktion $i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in Abbildung 2.9 ist eine Isometrie und beschreibt die Transformation vom übergeordneten frei wählbaren kartesischen Koordinatensystem in das untergeordnete kartesische Koordinatensystem der Kamera, welches um die optische Achse des Kameraobjektivs generiert wird.

2.3 3D Rekonstruktion

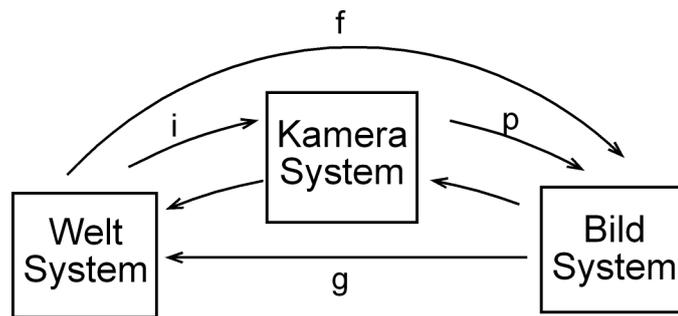


Abb. 2.9: Grundidee einer 3D Rekonstruktion. Von einem übergeordneten Weltsystem wird mittels einer räumlichen Isometrie i in ein Kamerasystem und von dort mittels einer Projektion p in das Bildkoordinatensystem transformiert. Die Rekonstruktion wird durch die Abbildung g definiert.

Die Abbildungsvorschrift p in Abbildung 2.9 ordnet einem Punkt im Kamerakoordinatensystem P_c , wie in Abbildung 2.10 dargestellt, einen Bildpunkt P_d zu.

Die Passpunkte werden dazu verwendet, die Funktion f in Abbildung 2.9, die einem Punkt P_w den Bildpunkt P_d (Abb.2.10) zuordnet, zu bestimmen.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, P_w \mapsto P_d$$

f ist dabei die Hintereinanderausführung der Isometrie i und der Projektion p (im Idealfall eine Zentralprojektion):

$$f = p \circ i.$$

Das Ziel ist i und p zu bestimmen und damit eine Abbildung g zu definieren, die einen Bildpunkt P_{Bild} in einen Punkt im übergeordneten Koordinatensystem abbildet, also rückprojiziert:

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, P_{\text{Bild}} \mapsto P_{\text{Welt}}$$

Tatsächlich ist das Ergebnis der Rückprojektion kein Punkt, sondern eine Gerade, da die Projektion p , wie in Abbildung 2.10 dargestellt und auf Seite 49 genauer beschrieben, unendlich viele Punkte auf denselben Bildpunkt abbildet. Aus der Rekonstruktion aus einem Bild kann nur jene Gerade ermittelt werden auf der der zu rekonstruierende Punkt liegt. Erst über den Schnitt zweier Geraden, ausgehend

2.3 3D Rekonstruktion

von zwei verschiedenen Aufnahmen, kann der zu rekonstruierende Punkt ermittelt werden. (Abb.2.11a).

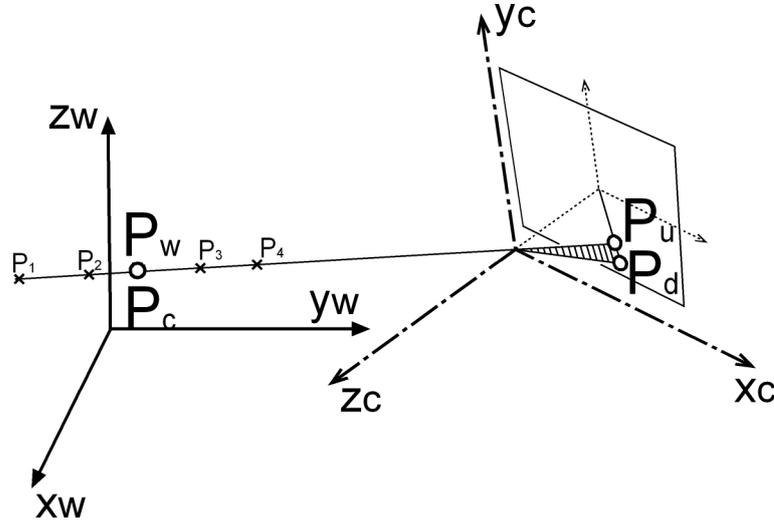


Abb. 2.10: Der Punkt P_w hat im WKS die Koordinaten (X_w, Y_w, Z_w) und im KKS $P_c = (X_c, Y_c, Z_c)$. Eine ideale Zentralprojektion würde den Punkt P_c und unendlich viele weitere Punkte P_i in denselben Punkt $P_{u(\text{ndistorted})}$ abbilden. In Realität weicht diese Abbildung allerdings von einer idealen Lochprojektion ab. R. Y. Tsai [44] gibt eine Verzerrung an, die radial in der schraffierten Ebene statt findet. Aus P_u wird dabei der verzerrte Bildpunkt $P_{d(\text{istorted})}$.

Die beiden Systeme Welt- und Kamerakoordinatensystem (Abb.2.10) werden ab jetzt als WKS mit Koordinaten (X_w, Y_w, Z_w) bzw. KKS mit Koordinaten (X_c, Y_c, Z_c) bezeichnet.

Die räumliche Isometrie ergibt sich mit den vorhin definierten Bezeichnungen zu:

$$\vec{X}_c = R \vec{X}_w + \vec{T} \quad (2.6)$$

Mit R als Rotationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \angle(x_c x_w) & \cos \angle(x_c y_w) & \cos \angle(x_c z_w) \\ \cos \angle(y_c x_w) & \cos \angle(y_c y_w) & \cos \angle(y_c z_w) \\ \cos \angle(z_c x_w) & \cos \angle(z_c y_w) & \cos \angle(z_c z_w) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Wobei die Winkel jeweils zwischen der alten und der neuen Koordinatenachse bestimmt werden. Der Kosinus eines solchen Winkels wird als Richtungskosinus be-

2.3 3D Rekonstruktion

zeichnet. R kann auch direkt über die Eulerwinkel angegeben werden, um die das aktuelle Koordinatensystem gedreht wird. Daraus bestimmt sich R zu $R = R_x R_y R_z$, wobei R_x die Drehung um die x-Achse um den Winkel ϑ beschreibt, analoge Bezeichnungen für R_y , φ und R_z , Ψ .

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi & -\cos \theta \sin \phi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Der Translationsvektor besteht aus

$$T = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Nach den Gleichungen (2.8) und (2.9) beträgt die Zahl der Parameter, die i beschreiben, sechs. Da diese Parameter die äußere Beziehung zwischen WKS und KKS beschreiben werden sie unter dem Sammelbegriff **äußere Parameter** geführt.

Sind die Weltkoordinaten ins Kamerasystem transformiert, kann dort die weitere Szenenerfassung, also die Projektion p , der Kamera modelliert werden. Handelt es sich mit p in guter Näherung um eine Zentralprojektion oder muss die Abbildung aufgrund von Verarbeitungs-, Abbildungs- oder Linsenfehlern durch komplexere Vorschriften erweitert werden? Die Antwort gibt ein Laborversuch (Abb.2.27, S.73) mit einem Referenzmuster. Die Parameter die p eindeutig bestimmen, werden unter **innere Parameter** geführt, sie beschreiben den Abbildungsvorgang der im Inneren der Kamera abläuft.

Als erste Näherung kann der Abbildungsvorgang in der Kamera als eine Zentralprojektion angenommen werden. Damit erhöht sich die Zahl der zu bestimmenden Parameter, die f beschreiben, von sechs für i , um die Brennweite auf sieben. Mit dieser Annahme kann für die Rekonstruktion, die einen Bildpunkt P_{Bild} mit zweidimensionalen Koordinaten in einen Weltpunkt P_{Welt} mit 3D Koordinaten überführt, wie in Abbildung 2.11a ein Projektionsstrahl vom Bildpunkt durch das Projektionszentrum, den Ursprung des KKS gelegt werden. Der Bildpunkt wird zu (X_d, Y_d, f) ins KKS transformiert. Der zu rekonstruierende Punkt P_{Welt} muss wie in Abbildung 2.11a dargestellt auf dem Strahl durch P_{Bild} und Z_i liegen. Genauere Information

2.3 3D Rekonstruktion

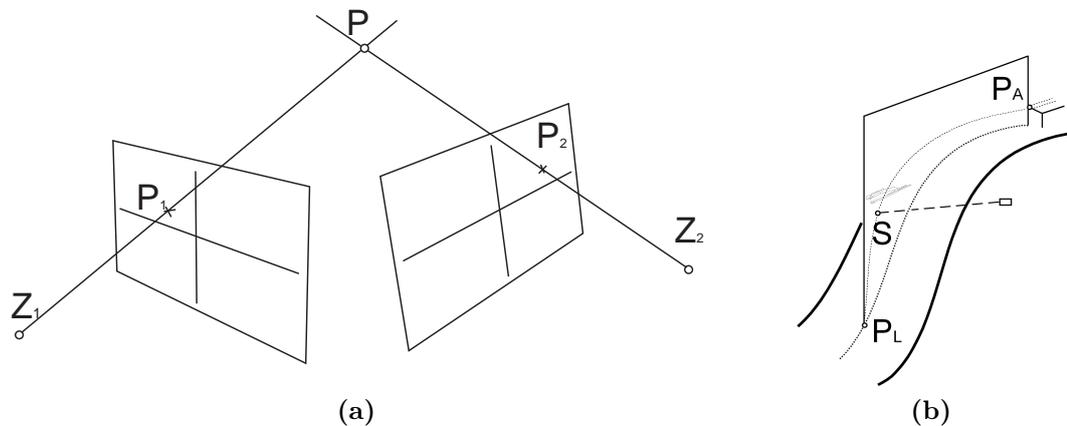


Abb. 2.11: a) Als Ergebnis der Rekonstruktion unter Annahme einer Zentralprojektion erhält man einen Lichtstrahl auf dem der gesuchte Objekt-punkt liegen muss. Für die exakte Position wird ein zweiter Lichtstrahl aus einer zweiten Aufnahme konstruiert und mit dem ersten geschnitten. Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen ist der zu rekonstruierende Punkt. b) Kamera 5 erfasst den Landepunkt des Skispringers. Durch den Absprung- und Landepunkt verläuft die vertikale Sprungebene. Dadurch genügt im Gegensatz zu a) nur eine einzelne Aufnahme für die Rekonstruktion, weil der Rekonstruktionsstrahl mit dieser Ebene geschnitten werden kann.

über die exakten Koordinaten des zu rekonstruierenden Punktes lassen sich aus einer einzelnen Aufnahme ohne weiteres nicht gewinnen. In [11, S.22] werden die Eigenschaften einer Zentralprojektion angeführt, wobei im folgenden Zitat P' anstelle von P_{Bild} und P anstelle von P_{Welt} steht:

1. „Jedem Punkt P des Raumes entspricht ein und nur ein Bildpunkt P' .
2. Jedem Bildpunkt P' entsprechen unendlich viel Raumpunkte P , nämlich alle Punkte der Geraden $P'O$.
3. [...]

Wird der Strahl mit der Funktion i ins WKS transformiert, kann dieser mit einem zweiten, aus einer zweiten Aufnahme von einem anderen Kamerastandpunkt gewonnenen Strahl geschnitten werden. Alternativ kann der Strahl mit der Ebene geschnitten werden in der die Bewegung stattfindet. Die beiden Varianten sind in Abbildung 2.11 dargestellt und liefern den zu rekonstruierenden Punkt.

2.3 3D Rekonstruktion

Es wird sich herausstellen, ob die erreichbare Genauigkeit der Zentralprojektion zufriedenstellend ist, oder ob auf eine komplexere Beschreibung des Abbildungsvorgangs zurückgegriffen werden muss. Wie diese modelliert werden, folgt ebenso wie die Abschätzung der Abweichung zwischen den Punkten $P_{u(\text{ndistorted})}$ und $P_{d(\text{istorted})}$ in Abbildung 2.10 in den nächsten Abschnitten. Dazu wird beginnend mit der Lochkamera die strikt geometrische Betrachtung von optischen Abbildungen Schritt für Schritt durch die genauere Analyse von Abbildungsfehlern erweitert. Schließlich wird ein heute gängiges Modell der Fotogrammetrie von R. Y. Tsai [44] erklärt.

2.3.1 Ideale Lochkamera

Die Annahme einer Zentralprojektion p führt dazu, dass die Abbildung durch die gleichen Gesetze wie sie in einer Lochkamera gelten beschrieben werden kann. Die Lochkamera, wie sie schon Aristoteles bekannt war, stellt die Urform eines modernen Fotoapparates dar [15, S.353]. Durch eine kleine Öffnung gelangen Lichtstrahlen in das Innere einer quaderförmigen Schachtel und treffen dort auf ein lichtempfindliches Medium, z.B. eine Fotoplatte. Die Grundlage für die folgenden Betrachtungen über optische Abbildungen sind die Grundaxiome der geometrischen Optik (S.55). Der Abbildungsvorgang entspricht daher idealisiert einer Zentralprojektion. Über den

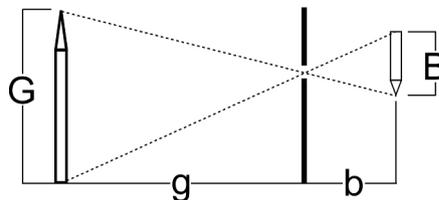


Abb. 2.12: Zentralprojektion in einer Lochkamera nach dem Strahlensatz

Strahlensatz in Gleichungen (2.10) kann bei Kenntnis von drei der vier Größen in Abbildung 2.12 die vierte berechnet werden.

$$\frac{G}{g} = \frac{B}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{G}{B} = \frac{g}{b} = r = \text{const.} \quad (2.10)$$

Wird angenommen, dass die Bildebene in guter Näherung parallel zur Sprungebene des Springers ist, kann für eine erste Rekonstruktion das Modell der Lochbildkamera herangezogen werden. An die Stelle der Bildgröße B tritt dann die Entfernung e_c

2.3 3D Rekonstruktion

der Bilder der Passpunkte auf den Aufnahmen. Die Entfernung e_w der Projektion der realen Punkte auf die Sprungebene ersetzt die Objektgröße G in (2.10). Mit dem Quotienten $\frac{e_w}{e_c}$ kann aus verschiedenen Bildabständen auf die realen Abstände geschlossen werden. Jeder Abstand auf dem Bild wird mit demselben Skalierungsfaktor in die Realität projiziert. Zur Bestimmung der Bildgrößen wird in diesem Modell mit Pixeladressen gearbeitet. Dabei stellen sich als genauigkeitslimitierende Faktoren folgende heraus:

- Diskrepanz zwischen Intensitätsmaximum und theoretischem Abbildungspunkt (Auslesemechanismus des Chips in Abbildung 2.26).
- Diskrepanz zwischen theoretischem Abbildungspunkt und tatsächlich vermessenem Punkt. Die Passpunkte konnten durch die Positionierung des Reflektors auf den Markern (S.45) nur bedingt exakt vermessen werden.

Wie stark sich diese Fehlerquellen auf das Ergebnis auswirken, kann am sinnvollsten durch eine Kontrolle mittels der übrigen Passpunkte im Bildbereich abgeschätzt werden. Diese Kontrolle entscheidet darüber, ob das Abbildungsmodell der Lochkamera erweitert werden muss.

2.3.2 Direct Linear Transformation

Ein etwas generelleres Herangehen an die Zentralprojektion stellt die Direct Linear Transformation (DLT) dar, wobei wieder in einem übergeordneten Weltkoordinaten- und einem Kamerakoordinatensystem gearbeitet wird. Der Ursprung des Kamerasystemw liegt in der Sensorebene. Die Koordinatenachsen im WKS sind laut Y.-H. Kwon [20] X, Y und Z, jene im KKS U, V und W und die Koordinaten des Projektionszentrums N werden mit (x_0, y_0, z_0) bzw. (u_0, v_0, d) bezeichnet. Es ergibt sich eine Situation wie in Abbildung 2.13 und damit folgende Zusammenhänge: Der Vektor \vec{A} zwischen einem Objektpunkt $P(x, y, z)$ und dem Projektionszentrum N ist parallel (=kolinear) zu dem Vektor \vec{B} zwischen $N(u_0, v_0, d)$ und dem Abbild $P'(u, v, 0)$. Das Projektionszentrum ist im Vergleich zur historischen Lochkamera das Loch im Kameragehäuse. Die Beziehung der Kolinearität

$$\vec{B} = c \vec{A} \tag{2.11}$$

2.3 3D Rekonstruktion

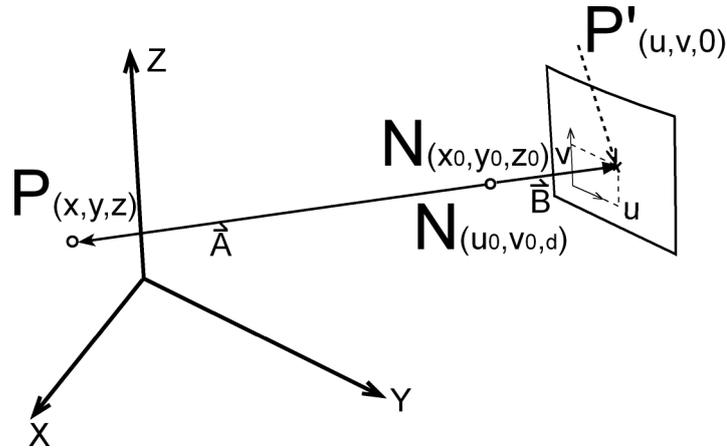


Abb. 2.13: Bezeichnungen wie sie Y.-H. Kwon in [20] verwendet.

gilt als Basis und namensgebend für die DLT. Für die nächsten Schritte wird \vec{A} mit Gleichung (2.6) in das KKS transformiert. Die Rotationsmatrix kann mit neun Einträgen r_{ij}

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, woraus mit (2.11)

$$\begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \\ -d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

entsteht. Als die DLT 1971 von Abdel-Aziz und Karara [zit. bei [44, S.324]] unter diesem Namen veröffentlicht wurde, war es rechentechnisch vermutlich besser, anstelle der Rotationsmatrix mit Eulerwinkeln, Matrizen mit neun Einträgen zu wählen. So handelt es sich bei den folgenden Berechnungen um lineare Gleichungssysteme, für die es einfache Lösungsverfahren gibt. Wird die dritte Gleichung in (2.12) verwendet, kann wie in [20]

$$c = \frac{-d}{r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)}$$

2.3 3D Rekonstruktion

berechnet werden. Damit wird aus den ersten beiden Zeilen von (2.12) unter Beachtung der Tatsache, dass die Koordinaten des Bildpunktes durch den Auslesemechanismus des Chips unter Umständen über z.B. $(u - u_0) \Rightarrow \lambda_u (u - u_0)$ skaliert werden.

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \frac{-d r_{11}(x - x_0) + r_{12}(y - y_0) + r_{13}(z - z_0)}{\lambda_u r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)} \\ v - v_0 &= \frac{-d r_{21}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) + r_{23}(z - z_0)}{\lambda_v r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)} \end{aligned}$$

Schließlich können die letzten beiden Gleichungen durch Umformen und anschließende Substitutionen wesentlich eleganter hingeschrieben werden.

$$u = \frac{L_1 x + L_2 y + L_3 z + L_4}{L_9 x + L_{10} y + L_{11} z + 1} \quad (2.13)$$

$$v = \frac{L_5 x + L_6 y + L_7 z + L_8}{L_9 x + L_{10} y + L_{11} z + 1} \quad (2.14)$$

Wobei die L_i nach einiger Rechenarbeit Kurzschreibweisen für Terme folgender Art sind:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-d (r_{11}(x - x_0) + r_{12}(y - y_0) + r_{13}(z - z_0))}{\lambda_u (r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0))} + \\ &+ \frac{\lambda_u u_0 (r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0))}{\lambda_u (r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0))} = \\ &= \frac{(\lambda_u u_0 r_{31} - d r_{11}) x + (\lambda_u u_0 r_{32} - d r_{12}) y + (\lambda_u u_0 r_{33} - d r_{13}) z}{\lambda_u [r_{31} x + r_{32} y + r_{33} - (r_{31} x_0 + r_{32} y_0 + r_{33} z_0)]} + \\ &+ \frac{(d r_{11} - \lambda_u u_0 r_{31}) x_0 + (d r_{12} - \lambda_u u_0 r_{32}) y_0 + (d r_{13} - \lambda_u u_0 r_{33}) z_0}{\lambda_u \underbrace{[r_{31} x + r_{32} y + r_{33} z - (r_{31} x_0 + r_{32} y_0 + r_{33} z_0)]}_D} = \\ &= \frac{\cancel{\emptyset}(\dots + \overbrace{\frac{\lambda_u u_0 r_{33} - d r_{13}}{D} z}^{L_3} + \dots)}{\underbrace{\cancel{\emptyset}(\frac{\lambda_u r_{31}}{D} x + \frac{\lambda_u r_{32}}{D} y + \frac{\lambda_u r_{33}}{D} z + 1)}_{\substack{L_9 \\ L_{10} \\ L_{11}}}} \end{aligned}$$

Bei Betrachtung der Gleichungen (2.13;2.14) wird ersichtlich, dass dort elf Unbekannte L_1, \dots, L_{11} zu bestimmen sind. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen

2.3 3D Rekonstruktion

dem Weltkoordinaten- und dem Kamerakoordinatensystem. Als Ergebnis einiger Umformungen der Gleichung (2.13) ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= L_1x + L_2y + L_3z + L_4 - uL_9x - uL_{10}y - uL_{11}z \\ v &= L_5x + L_6y + L_7z + L_8 - vL_9x - vL_{10}y - vL_{11}z \end{aligned}$$

Dies kann als Matrixmultiplikation angeschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & +y & +z & +1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -ux & -uy & -uz \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x & +y & +z & +1 & -vx & -vy & -vz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{10} \\ L_{11} \end{pmatrix}$$

Für n Passpunkte entwickeln sich obige Gleichungen zu einem Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +y_1 & +z_1 & +1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & +y_1 & +z_1 & +1 & -v_1x_1 & -v_1y_1 & -v_1z_1 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ x_n & +y_n & +z_n & +1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -u_nx_n & -u_ny_n & -u_nz_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_n & +y_n & +z_n & +1 & -v_nx_n & -v_ny_n & -v_nz_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{10} \\ L_{11} \end{pmatrix}$$

Für bekannte Koordinaten von sechs Passpunkten $x_1 \dots x_6$ ist dieses überbestimmte Gleichungssystem im Sinne von Gauß lösbar und somit die Beziehung zwischen WKS und KKS bekannt. Bis jetzt entspricht dieses Modell noch exakt der in Abschnitt 2.3.1 betrachteten Zentralprojektion in einer Lochkamera.

Fotos von langen Geraden entlang von Gebäuden lassen allerdings aufgrund ihrer Krümmung auf Aufnahmen darauf schließen, dass die Abbildung erheblich von einer idealen Lochprojektion abweicht. Der Abbildungsvorgang in dem optischen System genügt daher nicht den Bedingungen der Kollinearität der Vektoren $\vec{B} = c\vec{A}$. Als die DLT von Abdel-Aziz und Karara 1971 [zit. bei [44, S.324]] veröffentlicht wurde, versuchte man mit linearen Gleichungssystemen zu rechnen, weil diese mit einfachen Algorithmen und der damals relativ schwachen Rechnerleistung gut lösbar waren. Es gibt erweiterte Versionen der DLT, in denen auf Abbildungsfehler eingegangen wird, wodurch die Berechtigung für die Bezeichnung „linear“ verloren geht. Trotzdem blieb der Name DLT bis heute erhalten [44, S.324]. Bei Berücksichtigung von Abbildungsfehlern müssen weitere Parameter L_{12}, \dots, L_{16} eingeführt werden, womit

2.3 3D Rekonstruktion

sich die nötige Anzahl von Passpunkten auf acht erhöht [20].

Woher die Abbildungsfehler kommen, soll im nächsten Abschnitt erläutert werden. Die Geometrische Optik wird anhand eines Zitats M. Borns und E. Wolfs [2] definiert, dann werden grundlegende optische Eigenschaften erklärt, und Brechungen an Linsen diskutiert. Im Anschluss werden verschiedene Abbildungsfehler, die bei Durchgang durch eine Linse oder ein Linsensystem entstehen können, dargestellt.

Geometrische Optik

M. Born und E. Wolf definieren in [2, S.203] die Geometrische Optik wie folgt:

„The electromagnetic field associated with the propagation of visible light is characterized by very rapid oscillations (frequencies of the order of 10^{14}sec^{-1}) or, what amounts to the same thing, by the smallness of the wavelength (of order 10^{-5}cm). It may therefore be expected that a good first approximation to the propagation laws in such cases may be obtained by a complete neglect of the finiteness of the wavelength.[. . .]

The branch of optics which is characterized by the neglect of the wavelength, i.e. that corresponding to the limiting case $\lambda_0 \rightarrow 0$, is known as geometrical optics, since in this approximation the optical laws may be formulated in the language of geometry.“

Damit wird die Behandlung optischer Abbildungen als Wellenausbreitung durch geometrische Überlegungen abgelöst. In [6] wird dieses Erkenntnis zu folgenden Grundaxiomen der geometrischen Optik zusammengefasst.

- In einem optisch homogenen Medium sind die Lichtstrahlen Geraden
- An der Grenzfläche zwischen zwei Medien werden die Lichtstrahlen nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochen.
- Mehrere Strahlenbündel, die sich durchdringen, beeinflussen sich im Rahmen der linearen Optik nicht. Sie lenken sich insbesondere nicht gegenseitig ab. Im Überlagerungsgebiet der Strahlenbündel können Interferenzerscheinungen

2.3 3D Rekonstruktion

auftreten, aber nachdem die Bündel wieder räumlich getrennt sind, ist ihre Intensitätsverteilung so, als ob das gegenseitige Durchdringen nie stattgefunden hätte.

Für die Bestimmung der Richtungen der Strahlen wird die Kenntnis des Snelliusschen Brechungsgesetzes sowie des Reflexionsgesetzes vorausgesetzt. Diese können mittels der Maxwell'schen Gleichungen [2, S.12], des Huygensschen [28, S.60] oder mittels des Fermatschen Prinzips hergeleitet werden.

Das Fermatsche Prinzip zum Beispiel, welches laut [28] schon von Hero von Alexandria im 2. Jahrhundert v. Chr. in ähnlicher Weise formuliert wurde, besagt, dass Licht jenen Weg zwischen zwei Punkten A und B wählt, für den die Laufzeit T minimal wird.

$$T = T_1 + T_2 \quad (2.15)$$

Aus Abbildung 2.14 und [50, S.253] oder [5, S.383] kann für die Zeit, die der Licht-

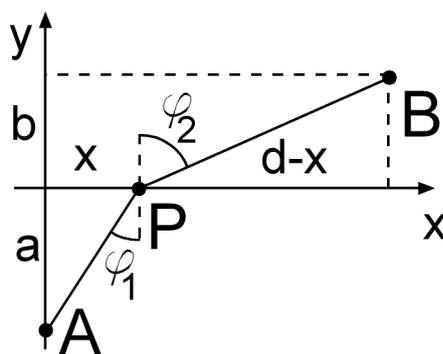


Abb. 2.14: Lichtstrahl zwischen den Punkten A und B

strahl in den Medien mit Lichtausbreitungsgeschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 benötigt Gleichung (2.15) zu

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2} \quad (2.16)$$

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.17)$$

2.3 3D Rekonstruktion

umgeschrieben werden. Nach Umformen der Gleichung (2.17) zu

$$\begin{aligned}
 v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2} x - v_1 \sqrt{a^2 + x^2} (d-x) &= 0 \\
 \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2} x}{\sqrt{a^2 + x^2} (d-x)} &= \frac{v_1}{v_2} \\
 \frac{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}} &= \frac{v_1}{v_2}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

wird daraus mit Abbildung 2.14 und $v_i = c/n_i$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} &= \frac{n_2}{n_1} \\
 &\text{oder} \\
 n_1 \sin \phi_1 &= n_2 \sin \phi_2
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

das Snelliussche Brechungsgesetz und als Spezialfall für $v_1 = v_2$ das Reflexionsgesetz. Mit diesem Gesetz lässt sich beschreiben, wie sich ein Lichtstrahl bei Übergang von einem Medium mit Brechungsindex n_1 in ein anderes mit Brechungsindex n_2 verhält.

Nun soll mittels dreier kurzer Beispiele die Anwendung der bisherigen optischen Erkenntnisse skizziert werden. Später wird von der idealen Konfiguration Abstand genommen und Abbildungsfehler werden diskutiert.

i) Brechung an einer gekrümmten Fläche, dünne Linse

Bei Betrachtung eines Lichtstrahls in Abbildung 2.15, der von links auf eine sphärisch gekrümmte Fläche trifft, folgt mit [6], g bzw. b als Gegenstands- bzw. Bildweite und der Näherung

$$\sin \alpha = \alpha \tag{2.20}$$

für kleine α , was als Gaußsche Näherung in der Optik bekannt ist:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{2.21}$$

2.3 3D Rekonstruktion

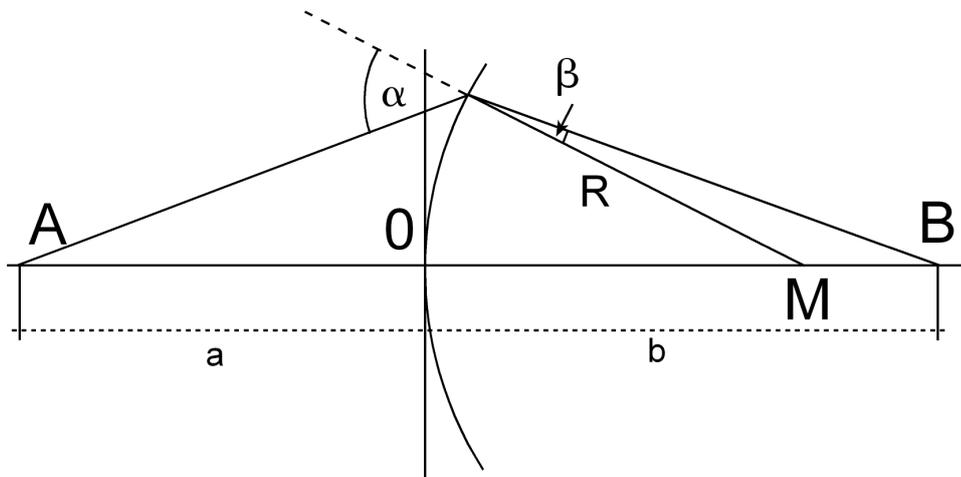


Abb. 2.15: Brechung an einer sphärischen Grenzfläche

Mit dem Spezialfall für ein Objekt im Unendlichen $g \rightarrow \infty$, parallel zur Achse einfallender Lichtstrahl, wird aus der vorigen Gleichung (2.21) mit $f := b$

$$f = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \quad (2.22)$$

Alle parallel einfallenden Lichtstrahlen werden so gebrochen, dass sie durch einen Punkt im Abstand f von 0 laufen. Dieser Punkt wird als Brennpunkt bezeichnet. Mit diesen beiden gewonnenen Gleichungen kann nun durch zwei aufeinanderfolgende Brechungen an zwei sphärischen Grenzflächen das Abbildungsverhalten einer dünnen Linse, mit Dicke d , beschrieben werden. Als dünn wird eine Linse nach [6, S.267] bezeichnet, falls gilt, dass $d = \overline{O_1 O_2}$ in Abbildung 2.16 klein gegenüber den Brennweiten und Gegenstands- bzw. Bildweiten ist. Wäre nur die linke Grenzfläche vorhanden, könnte die Position des imaginären Bildpunktes des Objektpunktes A nach (2.21) bestimmt werden. Die Lösung des Problems besteht nun darin, diesen imaginären Punkt als neuen Objektpunkt anzusehen und zu berechnen, wie ein von dort ausgehender Lichtstrahl nach Gleichung (2.21) gebrochen würde. Als Ergebnisse für die Brechung an einer dünnen Linse ergibt sich mit $n_1 = 1$, $n_2 = n$ und $d \ll a, b$

$$f = \frac{1}{n - 1} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \quad (2.23)$$

2.3 3D Rekonstruktion

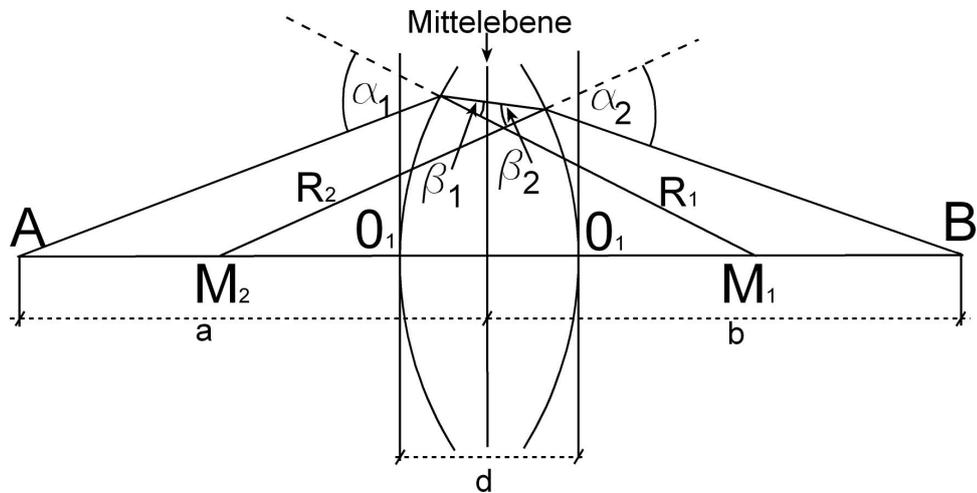


Abb. 2.16: Brechung an zwei sphärischen Grenzflächen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2.24)$$

Mit Gleichung (2.24) kann der Abbildungsvorgang an den beiden Grenzflächen durch einen einzelnen an einer Mittlebene mit der Gegenstandsweite a , der Bildweite b und der in (2.23) definierten Brennweite dargestellt werden.

ii) dicke Linse

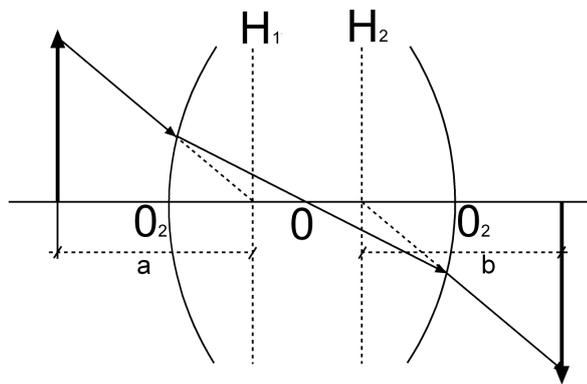


Abb. 2.17: Dicke Linse mit zwei Hauptebenen

Trifft die Annahme, dass d vernachlässigbar klein ist, nicht mehr zu, darf die Abbildung an beiden Grenzflächen nicht auf einen, an einer einzelnen Mittlebene statt findenden Prozess reduziert werden. Nach [6, S.269] und [39, S.10] werden zwei

2.3 3D Rekonstruktion

Hauptebenen eingeführt (Abb.2.17), an denen die Abbildung nach (2.24) berechnet werden kann. Nach Definition der beiden Ebenen kann angenommen werden, dass zwischen diesen beiden Hauptebenen die Strahlen parallel zur optischen Achse verlaufen. Werden die Längen a und b von den Hauptebenen H_1 und H_2 gemessen, gilt die für die dünne Linse gewonnene Abbildungsvorschrift (2.24) auch für eine dicke Linse mit der neuen Brennweite

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - 1) d}{n R_1 R_2} \right]. \quad (2.25)$$

iii) Linsensysteme

Außer der Lupe und einer Brille kommt kaum ein optisches Instrument mit nur einer Linse aus. Meist werden mehrere Linsen mit verschiedenen Brennweiten hintereinander montiert, um die Qualität der Abbildung im angestrebten Anwendungsbereich zu optimieren. Die einfachste Konstruktion, das Fernrohr, wurde laut des Projekts [4] des Kepler-Gymnasiums Pforzheim, welches mit dem Kepler-Förderpreis 2006 der Kepler-Gesellschaft e.V ausgezeichnet wurde, in den Jahren 1609/10 höchstwahrscheinlich von einem der Herren Galileo Galilei, Simon Marius, Thomas Harriot oder des holländischen Brillenmachers Johannes Lippershey erfunden. Galileo verwendete in seinem berühmten Fernrohr [6, S.340], mit dem er die Jupitermonde entdeckte, eine konkave und eine konvexe Linse, während Kepler zwei konkave Linsen (Abb.2.18) in sein Beobachtungsinstrument einbaute. Ausgehend von diesen beiden historischen Minimalkonfigurationen werden in einem fotografischen Aufnahmesystem mehrere Linsen zu einem optischen System zusammengefasst. Besonders wichtig dabei ist die präzise Justierung der Linsen. Für die Brennweite eines Linsensystems mit zwei Linsen folgt nach [22, S.338]:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2},$$

Meist ist es schwierig, exakte Daten für das verwendete optische System zu erhalten, da von Seiten der Hersteller natürlich Bedacht darauf gelegt wird, ihre technischen Errungenschaften möglichst geheim zu halten. Diese werden laut [22] zwar patentiert, doch ist es meist weder möglich, dem verwendeten Produkt eine Patentnummer zu zuordnen noch Firmennamen in Patenten zu finden.

2.3 3D Rekonstruktion

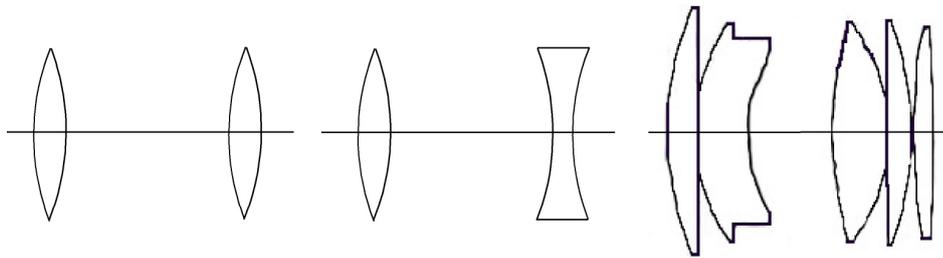


Abb. 2.18: v.l.: Keplersches, Galileisches Fernrohr und modernes Kameraobjektiv mit der Konvention, dass Lichtstrahlen von links auf das Linsensystem treffen

Sind in einem modernen Kameraobjektiv zum Beispiel drei Linsen hintereinander angeordnet, kann die oben angeführte Gleichung für die Brennweite mit der Substitution $p := \frac{1}{f}$ wie folgt erweitert werden.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 - (d_1 + d_2)p_1p_3 - d_2p_2p_3 + d_1d_2p_1p_2$$

Linsenfehler

In Experimenten mit nur einer dünnen Linse kann beobachtet werden, dass das Bild eines realen Punktes keineswegs den Vorstellungen eines mathematischen Punktes entspricht, vielmehr entsteht, wie es auch in [39] lautet, ein „Bildfleck“. Laut [22] kann dieser experimentelle Befund auch theoretisch nachgeprüft werden. Abbildungsfehler verhindern einen stigmatischen Abbildungsvorgang und verursachen eine Abweichung von der Position des Bildpunktes nach einer idealen Abbildung. Bis jetzt wurde in den Erklärungen zur geometrischen Optik davon ausgegangen, dass die Gaußsche Näherung, die laut [39] auch unter paraxialer Näherung oder Theorie erster Ordnung bekannt ist, gilt, und dass die Abbildung eines optischen Systems stets ideal ist. Gauß hatte 1844 die schon Newton im 17. Jahrhundert bekannten Beziehungen für paraxiale Strahlen erstmals veröffentlicht [22, S.330]. Erweiterungen für nicht paraxiale Strahlen wurden vor allem von Ludwig von Seidel in der Mitte des 19. Jahrhunderts hervorgebracht. Als erste Verfeinerung wurde schon vorher von diversen Autoren wie Fraunhofer und Petzval der Begriff der Theorie der dritten

2.3 3D Rekonstruktion

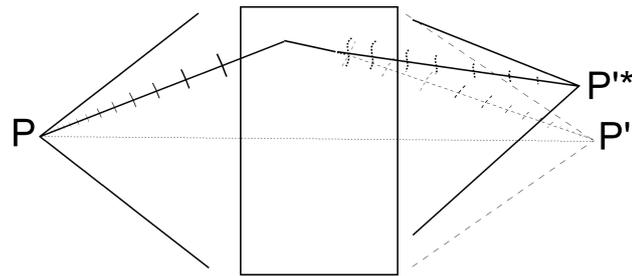


Abb. 2.19: Das fehlerbehaftete optische System verformt die Wellenfront des Strahls ausgehend von P, so dass sie in oder in einem Fleck um P'* konvergiert. Seidel modelliert Abbildungsfehler als Verformungen der Wellenfront, welche schematisch in der Blackbox des Abbildungssystems dargestellt sind.

Ordnung geprägt. Dabei wird anstelle der Näherung (2.20)

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$$

verwendet. Seidel beginnt seine Herleitung der Linsen Aberration mit der Überlegung, dass von dem abzubildenden Objekt Wellen ausgehen. Die Wellenfront stellt vor dem Eintritt in das optische Abbildungssystem eine sphärische Fläche dar. In einem perfekten, axial symmetrischen optischen System würde diese Wellenfront so umgeformt werden, dass sie im Bildpunkt konvergieren würde. Aufgrund von verschiedenen Einflüssen ist dies aber nicht der Fall, und es kommt zu assymetrischen Verformungen der zuvor perfekten Wellenfront (Abb.2.19). Die neuen Wellenfronten konvergieren nicht in einem Punkt sondern in einem verschobenen, ausgedehnten Fleck. Die Abweichung $\delta = \overline{P'P'^*}$ wird laut [2, S.204] als Aberration des Strahls bezeichnet. Die Aberration der Welle definiert Seidel als die optische Weglänge, welche durch die Verformung der Wellenfront (Abb.2.19) zwischen zwei Punkten eines einzelnen Lichtstrahls liegt. Dieser Unterschied kann laut den vielleicht historischen Angaben in [2] bis zu 50 Wellenlängen in handelsüblichen Geräten, in Hochpräzisionsgeräten jedoch nur Bruchteile der optischen Wellenlängen betragen. Seidel kommt nach seinen Berechnungen zum Ergebnis, dass sich die Wellenaberration, abgesehen von chromatischen Fehlern, in fünf Gruppen einteilen lässt. Er veröffentlicht verschiedene Potenzreihenentwicklungen seiner Theorie, als Theorie 3., 4. oder

2.3 3D Rekonstruktion

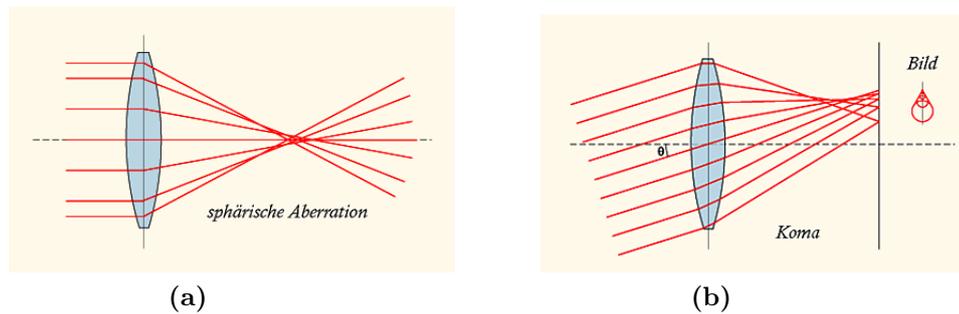


Abb. 2.20: ⁶a) sphärische Aberration, b) Koma

6. Grades. Linsenhersteller können sich mit dieser Erkenntnis darauf konzentrieren, spezielle Fehlerquellen entsprechend den Anforderungen zu reduzieren.

- Mit zunehmendem Abstand h von der optischen Achse verändert sich der Brechungsindex einer Linse.

$$f = f_0 + \Delta f(h)$$

Deshalb schneiden sich die Strahlen mit gleicher Eintrittshöhe h zwar auf der optischen Achse, die Gesamtheit der Strahlen aber nicht in demselben Abstand von der Linse. Je größer h , umso näher rückt der Schnittpunkt an die Linse heran. Dieser Abbildungsfehler kann vom Linsenhersteller durch zusätzliche Linsen oder durch eine bewusste asphärische Form der Linse minimiert werden. Das Ergebnis der **sphärischen Aberration** (Abb.2.20a) in der fotografischen Aufnahme ist ein Verlust des Kontrastes.

- Der Begriff **Koma** (Abb.2.20b) beschreibt den Abbildungsfehler eines parallelen Strahlenbündels, welches nicht senkrecht auf eine Linse auftrifft. Ähnlich wie vorher beschrieben, existiert kein einzelner Bildpunkt. Vielmehr entstehen verschiedene Bildpunkte mit unterschiedlichen Abständen sowohl von der optischen Achse als auch von der Linse. Der Effekt ist ebenso ein Kontrast- wie Schärfeverlust, da Objektpunkte auf Flecken abgebildet werden.
- Aus einem schräg einfallenden Lichtbündel mit endlichem Querschnitt werden zwei Ebenen betrachtet, eine horizontale und eine vertikale. Bei Betrachtung

⁶ Diese beiden Abbildungen stammen aus Wikimedia Commons.

2.3 3D Rekonstruktion

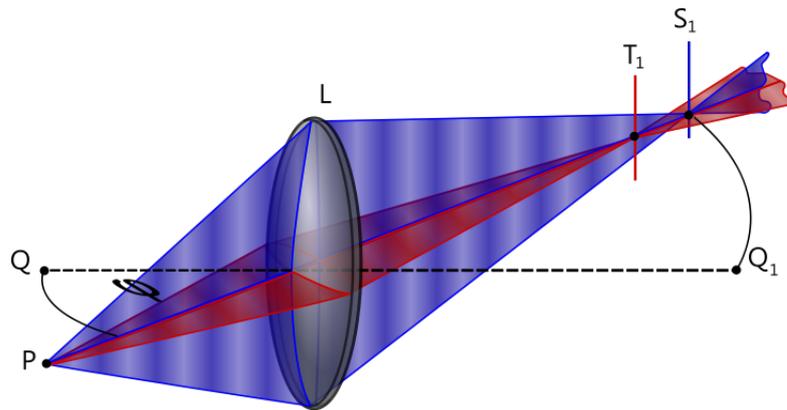


Abb. 2.21: ⁷Astigmatismus

der Berandungsstrahlen in den zwei ausgewählten Ebenen des Strahlkegels in Abbildung 2.21 fällt auf, dass sie unterschiedlich große Einfallswinkel besitzen und demnach anders gebrochen werden. Deshalb werden alle Strahlen in einer Ebene nicht auf denselben Punkt abgebildet wie die Strahlen in der anderen Ebene. Es entstehen genauer zwei linienförmige Elemente an den Positionen T_1 und S_1 , zwischen denen sich jener Bildfleck mit der kleinsten Ausdehnung und nahezu kreisförmiger Form befindet. Dieser Abbildungsfehler ist unter **Astigmatismus** (Abb.2.21) bekannt. Die Größe des Effekts wird durch den Abstand der Punkte $\overline{T_1S_1}$ bestimmt. Dieser Abstand wird umso größer, „je schiefer das Lichtbündel die Linse durchläuft.“ [6, S.277].

- Das Bild einer senkrecht auf die optische Achse stehenden Gegenstandsebene ist aufgrund der **Bildfeldwölbung** (Abb.2.22a) gewölbt. Dies kann wie in [6, S.280] sehr anschaulich mit der Abbildung eines Speichenrades illustriert werden. Aufgrund des veränderlichen Brechungsindex befinden sich die scharfen Bildpunkte auf einer gekrümmten Fläche.
- Die vier vorher angeführten Aberrationen haben Einfluss auf die Qualität einer Aufnahme. Der fünfte Abbildungsfehler, **Verzeichnung** (Abb.2.22b), verursacht eine Verschiebung des Bildpunktes von seiner idealen Position. Dies ist besonders für Fotogrammetristen von grundlegender Bedeutung. In [22, S.1] wird Fotogrammetrie als

⁷ Diese Abbildung stammt aus Wikimedia Commons.

2.3 3D Rekonstruktion

„the science or art of obtaining reliable measurements by means of photographs“

definiert, nach [19] sind Zahlen (Koordinaten), Zeichnungen (Karten und Pläne) oder Bilder (entzerrte Bilder) die Ergebnisse einer fotogrammetrischen Arbeit. Speziell in der Landerkundung, zum Beispiel der Herstellung von topografischen Karten mittels Orthofotos kommt der Rekonstruktion von Lage und Form von Objekten aus Fotografien große Bedeutung zu. Dazu muss aber bekannt sein, ob und wie das optische Abbildungssystem die Lage der Bildpunkte verändert. Nach [22] besteht die Verfälschung der Position nach der Seidelschen Theorie dritten Grades, der primären Seidel Aberration, aus einem „Displacement“ **radial** nach außen oder innen. Eine Verschiebung nach außen resultiert in einer kissenförmigen Verformung der Abbildung eines quadratischen Netzes, ein Verzeichnung nach innen erzeugt eine tonnenförmige. Geraden die nicht durch den Durchstoßpunkt der optischen Achse durch die Bildebene laufen, werden gekrümmt (Abb.2.22b). Die Verzeichnung wird in Zehntelmillimeter oder in Prozent angegeben. Meist wird die prozentuelle Verzeichnung als Reihe mit geraden Potenzen des Abstandes zur optischen Achse angegeben [22, S.352]:

$$\frac{\Delta r}{r} = \sum_{i=1}^n \kappa_i r^{2i} \quad (2.26)$$

Mit $\Delta r = \tilde{r} - r$ als Abweichung der verzeichneten Koordinate \tilde{r} von der unverzeichneten Koordinate r , wird daraus in Übereinstimmung mit der Gleichung [29, S.38]:

$$\tilde{r} = r + \kappa_1 r^3 + \kappa_2 r^5 + \dots \quad (2.27)$$

Die Anforderung an ein optisches System nach perfekter Rotationssymmetrie kann von Herstellern nicht erfüllt werden. Unter anderem verursachen Zentrier- und Justierfehler zusätzlich zur radialen Verschiebung auch eine **tangentiale** (Abb.2.25), welche aber grundsätzlich nicht zu den Aberrationsfehlern gezählt werden darf. Sie wurde erstmals von J. T. Pennington 1947 beobachtet und veröffentlicht. Der Effekt einer nicht perfekt zentrierten Linse ist sehr ähnlich zu einer perfekt zentrierten Linse mit einem nachgeschalteten Prisma, weshalb laut [22] der Begriff Prisma-Effekt mit tangentialer Verzeichnung gleichzusetzen ist. Die Modellierung der radialen bzw. tangentialen Verschiebung, δ_r bzw.

2.3 3D Rekonstruktion

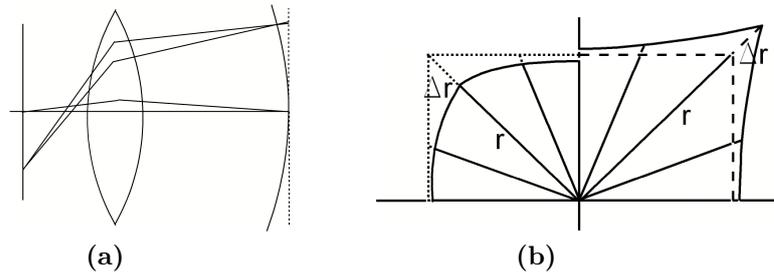


Abb. 2.22: a) Bildfeldwölbung, b) tonnen- bzw. kissenförmige radiale Verzeichnung

δ_t , erfolgt in [22] mittels ähnlicher Reihen wie Gleichung (2.26) zu

$$\delta_r = 3(J_1 r^2 + J_2 r^4 + \dots) \sin(\phi - \phi_0) \quad (2.28)$$

$$\delta_t = (J_1 r^2 + J_2 r^4 + \dots) \cos(\phi - \phi_0) \quad (2.29)$$

wobei ϕ_0 die Richtung zwischen einer bestimmten Richtung und der Richtung zum Maximalwert der tangentialen Verzeichnung beschreibt, und die J_i die Koeffizienten der Potenzreihen sind. Die beiden trigonometrischen Funktionen bedeuten, dass sich bei dem Extremwert der tangentialen Verzeichnung ein Nulldurchgang für die radiale Komponente ergibt und vicevers.

Im Laufe der letzten Jahrzehnte hat sich der Aufgabenbereich eines Fotogrammetristen stark verändert. Bei der metrischen Bildauswertung musste beachtet werden, welchen Temperaturen und Luftfeuchten das Bildmaterial in der Vergangenheit ausgesetzt war [19]. Kalibrierungsmethoden wurden Anfang der Neunziger Jahre vielfach noch mit mechanischen Instrumenten durchgeführt, zur Feststellung der radialen Verzeichnung z.B. das Goniometer [19, S.29]. Heute ist Software verfügbar, die anhand digitaler Bilder eines Referenzmusters die Abbildungseigenschaften eines optischen System bestimmt und gleichzeitig korrigieren kann.

2.3.3 TSAI Algorithmus

R. Y. Tsai veröffentlicht in [44] eine Arbeit, in der er verschiedene Arten der Kamerakalibrierung durch eine einzige effiziente aber trotzdem ausreichend exakte Version ersetzt. Ich werde mich in diesem Abschnitt stark an dem Originalzitat [44] orientieren. Tsai unterscheidet bezüglich 3D Rekonstruktionen zwischen dem Bestreben

2.3 3D Rekonstruktion

Information über die Lage eines 3D Objekts, wie es für uns interessant ist, und dem Versuch die Bewegung der Kamera, die vielleicht auf einem Roboterarm montiert ist, bei gegebenem Kalibrierungsmuster zu berechnen. Er stellt an ein System, welches die Abbildung $3D \leftrightarrow 2D$ beschreibt, folgende Anforderungen.

- Die Berechnung soll vollkommen automatisch ablaufen, das heißt, dass keine manuelle Startwerteingabe gefordert wird.
- Für die Roboteranwendung muss eine Genauigkeit im $\frac{1}{1000}$ Bereich der Größenordnung des Bewegungsfreiraumes erreicht werden.
- Die Berechnung soll in einem maximal fünf dimensional nicht linearen Gleichungssystem lösbar sein.
- Das Modell soll universell einsetzbar sein.
- Die Rekonstruktion soll mit handelsüblichen Kameras durchführbar sein.

Tsai [44] ist mit den bisher verfügbaren Algorithmen nicht zufrieden. So bemängelt er die hohe Anzahl von bis zu 24 Parametern in oft nicht linearen Gleichungssystemen und die daraus resultierende Rechenintensität. Die DLT im vorigen Abschnitt 2.3.2 vermindert zwar die notwendige Rechenleistung durch Modifikation der Parameter in ein lineares Gleichungssystem, das schließlich unter Berücksichtigung von Linsenfehlern aufgrund der Abhängigkeit eines Parameters von mehreren anderen, iterativ gelöst werden muss. Doch auch hier ist er aufgrund des großen relativen Fehlers, er beträgt im 80% Bereich um das Aufnahmezentrum $\frac{1}{2000}$ der Abmessung des Bildbereichs und steigt in einem Bereich $>90\%$ um 100% an, im Außenbereich der Aufnahme nicht zufrieden [44, S.324]. Es gab noch viele weitere Bestrebungen, in denen vielfach versucht wurde, die Parameter mittels verschiedener Optimierungsverfahren zu bestimmen. Wie in einem Artikel des europäischen Projekts SPARC⁸ [1] beschrieben, eignet sich der Tsai Algorithmus für viele Anwendungen und wird aufgrund der hohen erzielbaren Genauigkeit vielerorts⁹ praktiziert. Sein Modell basiert auf ähnlichen Überlegungen, wie sie bereits weiter oben erklärt wurden. Tsai geht bei der Bestimmung der Abbildungsparameter, wie in Abbildung 2.23 illustriert, in vier Stufen vor. Zu Beginn des Abschnitts 2.3 in der Gleichung (2.6) wurde bereits

⁸ Secure Propulsion using Advanced Redundant Control

⁹ zum Beispiel die Diplomarbeit von R. Stoffner [40]

2.3 3D Rekonstruktion

Transformation vom WKS ins KKS
nach (2.30) bzw. (2.6)
die äußeren Parameter

Ideale Abbildung einer Lochbildkamera
die Brennweite f

Korrektur der Abbildungsfehler
die Verzeichnungsterme κ_i

Korrektur des Pixelauslesemechanismus
der Auslesemechanismusparameter s_x

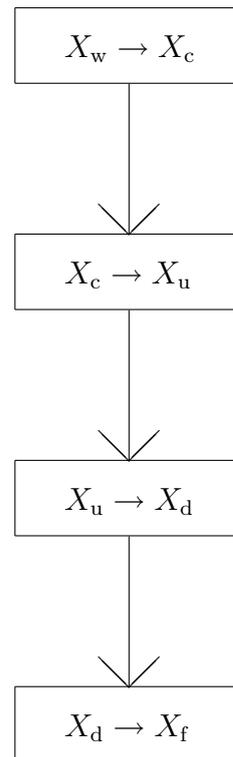


Abb. 2.23: Darstellung der von Tsai [44, S.327] vorgeschlagenen Unterteilung der Rekonstruktion in vier Ebenen. Die äußeren Parameter bestimmen die Abbildung vom WKS ins KKS, die inneren Parameter definieren die Abbildung im Kamerakoordinatensystem.

beschrieben, dass der erste Schritt bei dieser Bestimmung der Transformation von einem übergeordneten Weltkoordinatensystem (WKS) in das Kamerakoordinatensystem (KKS) aus einer Rotation und eine Translation besteht.

$$\vec{X}_c = R\vec{X}_w + \vec{T} \quad (2.30)$$

Dabei sind wie bereits weiter vorne erklärt 3+3 Parameter bei Betrachtung der Rotationsmatrix mit Einträgen aus Eulerwinkeln zu bestimmen. Sind sämtliche Koordinaten schließlich im einheitlichen KKS wird dort eine Zentralprojektion, mit Brennweite f , wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben und in Abbildung 2.10 dargestellt, durchgeführt. Eine einfache Methode aus dreidimensionalen Koordinaten zweidimensionale zu machen, besteht darin, die X_c und Y_c Komponente durch die Z_c -Koordinate zu dividieren. Dabei werden alle Punkte im 3D Raum auf Punkte P_i

2.3 3D Rekonstruktion

reduziert, die eine Einheit von der xy -Ebene entfernt sind. Offensichtlich geht dabei die Information der wahren Z_c -Koordinate verloren. Alle Punkte auf einer beliebigen Geraden durch Ursprung und den Punkt P liegen, werden auf denselben Punkt P abgebildet. Hinter dieser einfachen Überlegung steckt nichts anderes als der Strahlensatz wie ihn Abbildung 2.24 zeigt. Dabei ergibt sich für eine Skalierung

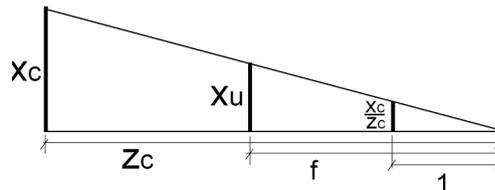


Abb. 2.24: Reduktion der z -Koordinate durch Division der x -Koordinate durch die z -Koordinate. Der neue Punkt hat Koordinaten $(x_u, 0, f)$. Analog kann für die y -Koordinate argumentiert werden. Dann ergeben sich die Koordinaten des Punktes P zu (x_u, y_u, f) . Durch die Anordnung der betrachteten Abstände auf einer Seite des Strahlencentrums kann die z -Koordinate stets positiv angenommen werden.

der erhaltenen reduzierten Koordinaten mit der Brennweite f , also einer Verrückung der Ebene mit Abstand 1 auf Abstand f , die Bildkoordinate eines Bildpunktes nach idealer Zentralprojektion zu:

$$X_u = f \frac{X_c}{Z_c} \quad (2.31)$$

$$Y_u = f \frac{Y_c}{Z_c} \quad (2.32)$$

Nun entspricht die Abbildung einer handelsüblichen Kamera kaum den Ansprüchen einer idealen Lochkamera. Die Koordinaten des realen Bildpunktes $(X_{d(\text{istorted})}, Y_d)$ fallen, wie den Abbildungen 2.10, 2.25 und Abschnitt 2.3.2 zu entnehmen, nicht mit denen des idealen Projektionspunktes $(X_{u(\text{ndistorted})}, Y_u)$ zusammen. Die Gründe für diese Abweichung können, wie in Kapitel 2.3.2 beschrieben, vielfältig sein. Für Tsai ist es ausreichend, die Abweichung als radiale Verzeichnung zu modellieren. Diese

2.3 3D Rekonstruktion

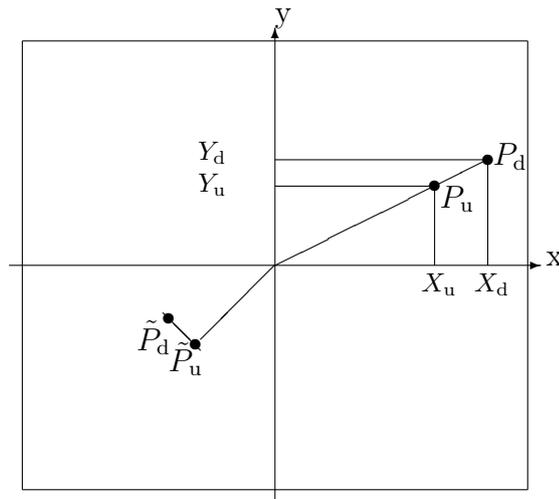


Abb. 2.25: Abweichung des tatsächlichen Punktes P_d von dem idealen Projektionspunkt P_u , mittels radialer Verzerrung im ersten und tangentialer Verzerrung im dritten Quadranten. Die tangentiale Komponente wird laut Tsai [44] vernachlässigt.

bestimmt er als $D_x = X_u - X_d$ bzw. $D_y = Y_u - Y_d$ mit unendlichen Reihen zu

$$\begin{aligned} D_x &= X_d (\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \dots) \\ D_y &= Y_d (\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \dots) \\ r &= \sqrt{X_d^2 + Y_d^2} \end{aligned}$$

und gibt sich schließlich mit dem ersten Reihenglied und dem zu bestimmenden Koeffizient κ_1 zufrieden. Er begründet dies damit, dass eine Inbetrachtung der Terme höherer Ordnung keinen Genauigkeitsgewinn bringe, sondern unter Umständen numerische Instabilitäten verursachen würde. Die tangentiale Abweichung lässt er mit denselben Argumenten außer Acht. Die idealen Koordinaten des Punktes erhält er aus der Addition des Fehlerterms D_x bzw. D_y [44, S.327] zu

$$\begin{aligned} X_u &= X_d + D_x \\ Y_u &= Y_d + D_y, \end{aligned}$$

wobei die Vorzeichen durch die Koeffizienten in den jeweiligen Reihen für D_x bzw. D_y bestimmt werden. Im nächsten Schritt muss bestimmt werden, auf welchem CCD

2.3 3D Rekonstruktion

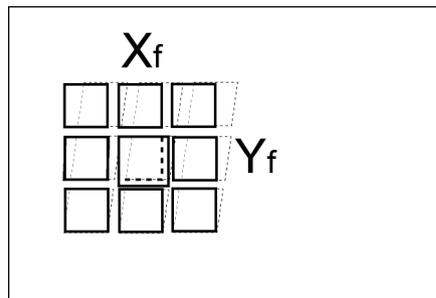


Abb. 2.26: Auf dem Bildsensor wird der Bildpunkt auf dem Sensorelement mit der Adresse (X_f, Y_f) registriert. s_x wird als Skalierungsfaktor der Sensorgröße eingeführt. Nach [22] kann meist darauf verzichtet werden eine Scherung des Bildkoordinatensystem zu berücksichtigen. Als Scherung wird eine eventuelle Abweichung des Chips von der perfekten rechteckigen Form bezeichnet.

Element der reale Bildpunkt registriert wurde. Aus den Pixelkoordinaten kann so auf ein metrisches Koordinatensystem umgerechnet werden. Der Sensor der verwendeten Kamera besitzt 1240x1024 Elemente. Nun berechnet Tsai mittels

$$X_f = s_x d'_x X_d + C_x \quad Y_f = d_y^{-1} Y_d + C_y \quad (2.33)$$

auf welchem Pixel die verzeichnete Koordinate registriert wird. Die Bedeutung der neu eingeführten Variablen kann aus Tabelle 2.1 mit Zuhilfenahme von Abbildung 2.26 entnommen werden.

X_f, X_f	Zeilen und Spaltennummer des registrierten Pixel
C_x, C_y	Pixeladresse des Zentrums des Sensors
d_x, d_y	Abstand zwischen benachbarten Sensorelementen in x bzw. y-Richtung
N_{cx}	Anzahl der Sensorelemente in x-Richtung
N_{fx}	Anzahl der in einer Linie aufgezeichneten Pixel
s_x	Skalierungsfaktor der nach [29] und Abb. 2.26 strukturelle Auflösungsunterschiede in x-Richtung korrigiert. Die y-Skalierung wird nach [44] bereits mithilfe der Brennweite berücksichtigt.
$d'_x := d_x \frac{N_{cx}}{N_{fx}}$	

Tab. 2.1: Variablen in (2.33) der vierten Ebene in Abbildung 2.23

2.3 3D Rekonstruktion

Somit beinhaltet der Tsai Algorithmus elf Parameter, die in zwei Gruppen eingeteilt werden. Zum einen die inneren Parameter, f , κ_1 , C_x , C_y und s_x , zum anderen die äußeren Parameter R_x , R_y , R_z , T_x , T_y und T_z , welche die Transformation vom Weltkoordinatensystem ins Kamerakoordinatensystem beschreiben.

J.-Y. Bouguet stellt in [3] eine Matlab Toolbox für nicht kommerzielle Verwendung zur Verfügung, mit welcher aufgrund von mehreren Aufnahmen eines Referenzmusters die inneren und äußeren Parameter einer Aufnahmesituation ermittelt werden können. Für die detaillierte Bedienungsanleitung mit einigen hilfreichen Beispielen sei hier auf die entsprechende URL [3] verwiesen. Die Kalibrierungsbilder eines Schachbrettmusters wurden in einem Versuchsaufbau, wie ihn Abbildung 2.27 zeigt, aufgenommen. Die Toolbox extrahiert die Koordinaten der Rasterpunkte des Schachbrettmusters, woraus die äußeren Parameter, das heißt die Position und Richtung jeder einzelnen Aufnahme und die inneren Parameter des Aufnahmesystems berechnet werden. Die Ergebnisse sind in Anhang D angegeben.

Nun müssen die Schritte in Abbildung 2.23 invertiert werden. Von der Pixeladresse zur unverzeichneten metrischen Koordinate des Bildpunktes, über die inverse Zentralprojektion auf einen Strahl im KKS und schließlich über die Beziehung (2.30) zurück ins WKS.

1. $X_{d(\text{istorted})}$ aus der Pixeladresse X_f

$$\begin{aligned}X_d &= (X_f - C_x) * dx/sx \\ Y_d &= (Y_f - C_y) * dy\end{aligned}\tag{2.34}$$

2. $X_{u(\text{distorted})}$ aus X_d nach Tsai

$$\begin{aligned}X_u &= X_d(1 + \kappa_1 r^2) \\ Y_u &= Y_d(1 + \kappa_1 r^2)\end{aligned}\tag{2.35}$$

3. Mit nur einer Aufnahme kann wie auf Seite 49 beschrieben, nur eine Gerade ermittelt werden, auf der der gesuchte Punkt liegen muss. Diese Gerade s geht

2.3 3D Rekonstruktion



(a)



(b)

Abb. 2.27: a) Kalibrierungsanordnung, b) Kameraperspektive

2.3 3D Rekonstruktion

durch X_u und den Ursprung des KKS.

$$s : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ f \end{pmatrix}$$

Anstatt zwei Aufnahmen zu verwenden, kann die Ebene in der die Bewegung stattfindet (S.39) bestimmt werden.

$$\epsilon : ax + by + cz = d$$

Mit Abbildung 2.11b folgt, dass der Schnittpunkt \vec{S} der Geraden s mit der Bewegungsebene ϵ der zu rekonstruierende Punkt im KKS ist.

$$s \cap \epsilon : \lambda = \frac{d}{aX_u + bY_u + cf}$$

$$\vec{S} = \frac{d}{aX_u + bY_u + cf} \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ f \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

4. Koordinatentransformation nach (2.30) von Kamera- ins Weltkoordinatensystem:

$$\vec{S}_{\text{WKS}} = R^{-1} (\vec{S} - \vec{T}) \quad (2.37)$$

Die Ergebnisse der Matlab Toolbox [3] in Anhang D beinhalten neben den optimierten Werten für die inneren Parameter auch deren Standardabweichungen. Es stellt sich die Frage, wie stark sich die fehlerbehafteten Parameter (S.107) auf einen rekonstruierten Punkt auswirken. Dies kann mittels zweier Methoden beurteilt werden. Erstens kann die Rekonstruktion an einem vermessenen aber für die Berechnung nicht verwendeten Punkt kontrolliert werden, zweitens ist es auch möglich eine generelle Fehlerfortpflanzungsberechnung durchzuführen. Wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz (2.5) auf die Funktion, welche die unverzeichnete Koordinate aus der Pixeladresse berechnet, angewendet, ergibt sich eine Fehlerverteilung für $\frac{\Delta r}{r}$ wie in Abbildung 2.31. Daraus kann entnommen werden, dass der Fehler im zwei bis drei

2.3 3D Rekonstruktion

Prozent-Bereich liegt, was sich für das Ergebnis in Abschnitt 2.4 als gravierend herausstellen wird.

2.3.4 Optimierung der Winkel in der Rotationsmatrix

In Abschnitt 2.2 wurde die geodätische Vermessung beschrieben. Zusätzlich zu den Passpunkten wurden auch die Positionen und Richtungen der Kameragehäuse bestimmt. Diese Information dient als Startwert für die Berechnung der (optimalen) Rotationsmatrix und des Translationsvektors für Gleichung (2.30). Dies wurde mittels einer sehr einfachen Methode nach Abbildung 2.28 durchgeführt.

Als Startwert für die Richtung der Aufnahme wird die Richtung des Kameragehäuses verwendet. Diese Richtung wurde mittels geodätischer Erfassung eines Punktes vorne und hinten am Gehäuse ermittelt. Nun werden die Bildkoordinaten der zur

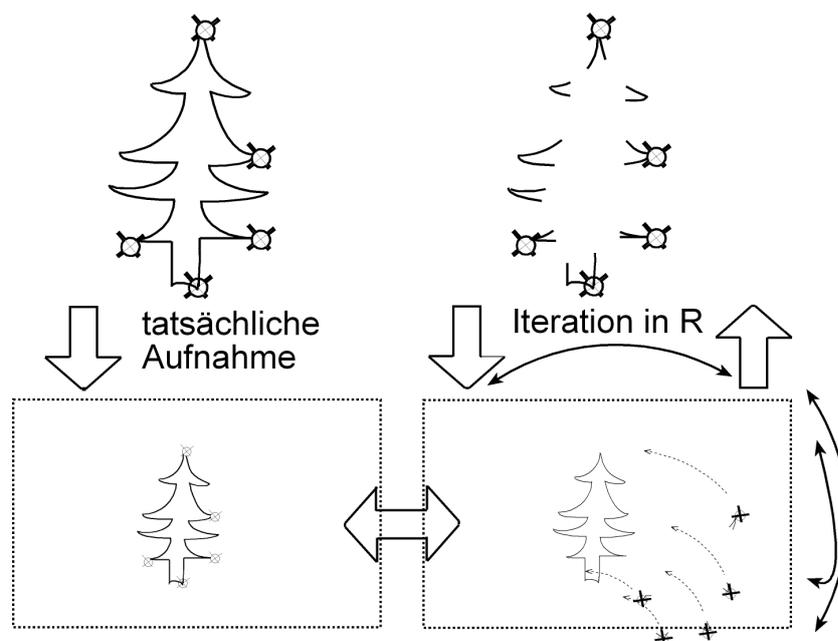


Abb. 2.28: Schematische Darstellung der Optimierungsmethode für die Rotationsmatrix R . Dabei wird das tatsächliche Bild mit einem aus Passpunkten konstruierten Bild, das nach der kompletten Abbildung f mit Iterationsdaten für R entstehen würde, verglichen. Die Iteration wird solange durchgeführt, bis die Abweichung der Punkte im linken Bild von den jeweils zugehörigen im rechten Bild unter eine vorgegebene Schranke fällt.

2.4 Ergebnisse

Verfügung stehenden Passpunkte berechnet, wie sie mit den Startwerten für R und der weiteren Abbildung im Kamerakoordinatensystem mit den im Labor gewonnenen inneren Parametern entstehen würden. Dann werden die so kalkulierten Bildkoordinaten mit jenen der tatsächlichen Aufnahme verglichen. Es stellt sich heraus, dass es beträchtliche Abweichungen gibt (Abb.2.28). Nun wird zum Beispiel eine Korrektur des Rotationswinkels um die x -Achse durchgeführt. Und wieder wird das mit den neuen Daten für R gewonnen Bild mit dem tatsächlichen verglichen. Dann werden die anderen Winkel optimiert, bis die Abweichung, der Abstand zwischen tatsächlichem und neu projiziertem Punkt, unter eine Schranke fällt.

Bildlich entspricht diesem Verfahren das händische „Probieren“ die Kamera so zu orientieren, dass das bereits aufgezeichnete Bild aufgenommen werden kann. Iterativ wird die links-rechts Ausrichtung der Kamera während der Näherung der oben-unten Orientierung optimiert.

2.4 Ergebnisse

Mit den Ergebnissen der Matlab Toolbox in Anhang D und den Schritten des Tsai Algorithmus wurde nach der Anpassung der äußeren Parameter die Rekonstruktion durchgeführt. Die ersten Ergebnisse wurden mittels Rückprojektion von vermessenen Punkten kontrolliert. Dabei lieferte die Rückprojektion für die beiden Kameras eins und zwei die Werte in Tabelle 2.2. Es stellt sich heraus, dass der Fehler in der z -Richtung mit 10 cm für Punkt P22 über der angepeilten Genauigkeit von 5 cm liegt. Die vertikale Ebene auf der sich P22 befindet ist rund 70 m von der Kameraposition entfernt. Nach einer weiteren einfachen Strahlensatzüberlegung halbiert sich der Fehler für die vertikale Sprungebene in rund 35 Metern auf ca. 5 cm. Damit wäre das Ziel, die Koordinaten des Hüftgelenks und weiterer neuralgischer Punkte des Springerkörpers auf 5 cm genau bestimmen zu können, realisierbar.

Eine ergänzende und anwendungsrelevante Untersuchung der Qualität der berechneten Parameter besteht im Vergleich eines aufgezeichneten Bildes mit einer theoretischen Aufnahme. Die theoretische Aufnahme erhält man durch Abbilden der Passpunkte mit den jetzt bekannten Parametern für R . Die beiden Aufnahmen werden wie in den beiden Abbildungen 2.29a und 2.29b übereinander gelegt und

2.4 Ergebnisse

Punkt	cam1			cam2		
	P25	P24	P22	P1	P3	P2
vermes- sen [m]						
x	16,4030	14,2020	8,8814	39,5140	37,9790	35,2990
y	-37,7300	-39,1450	-31,8820	-18,0160	-20,2650	-19,7760
z	2,4780	-0,2691	-3,1463	-12,7760	-12,7580	-12,7710
rekon- struiert[m]						
x	16,4890	14,2700	8,8135	39,5550	37,9850	35,2490
y	-37,7300	-39,1450	-31,8820	-18,0160	-20,2650	-19,7760
z	2,4847	-0,2994	-3,2463	-12,7770	-12,7580	-12,7710
Abwei- chung [m]						
deltax	-0,0860	-0,0680	0,0679	-0,0410	-0,0060	0,0500
deltay	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
deltaz	-0,0067	0,0303	0,1000	0,0010	0,0000	0,0000

Tab. 2.2: Test des Verfahrens: Die Koordinaten, die nach Entzerrung der Bilder mittels des Tsai Algorithmus und Optimierung der äußeren Parameter aus der Rückprojektion gewonnen wurden, werden mit den realen Koordinaten aus der Vermessung verglichen. Durch diese Abweichungen kann eine Aussage über die Qualität des Verfahrens getroffen werden. Würde ein rückprojizierter Punkt weit von seinem realen Pendant entfernt sein, müsste an allen Parametern gezweifelt werden.

untersucht wie weit der konstruierte Punkt vom tatsächlichen Punkt entfernt ist. Liegen die beiden Markierungen (\circ , $+$) näher beieinander als das Intensitätsmaximum des Passpunktes lokalisiert werden kann, ist ein komplexerer Algorithmus zur Bestimmung von R nicht notwendig. Für einige Testpunkte im Mittelbereich der Aufnahmen in Abbildung 2.29a ergeben sich sehr zufriedenstellende Ergebnisse. Die Abweichungen sind so gering, dass jener Fehler, der bei der Auswahl des richtigen Pixels gemacht wird, dabei sicher unterschritten wird.

Es stellt sich die Frage, wie genau die entsprechenden Gelenke des Skispringers bzw. die Landmarker im Hintergrund anvisiert werden können. Die Landmarker mit einer realen Größe von 4,5x4,5 cm (S.35) sind auf dem Bild auf ein 5x5 Pixelfeld. Der Anwender muss entscheiden, welcher dieser Pixel den vermessenen Punkt am besten repräsentiert. Ein ähnliches Problem ergibt sich bei der Lokalisierung der Hüfte des Skispringers. Diese erstreckt sich in Abbildung 2.30 von Pixeladresse (689,510) bis (709,490) über ein 20x20 Pixelfeld, das Hüftgelenk kann dabei auf ein 6x6 Pixel-

2.4 Ergebnisse

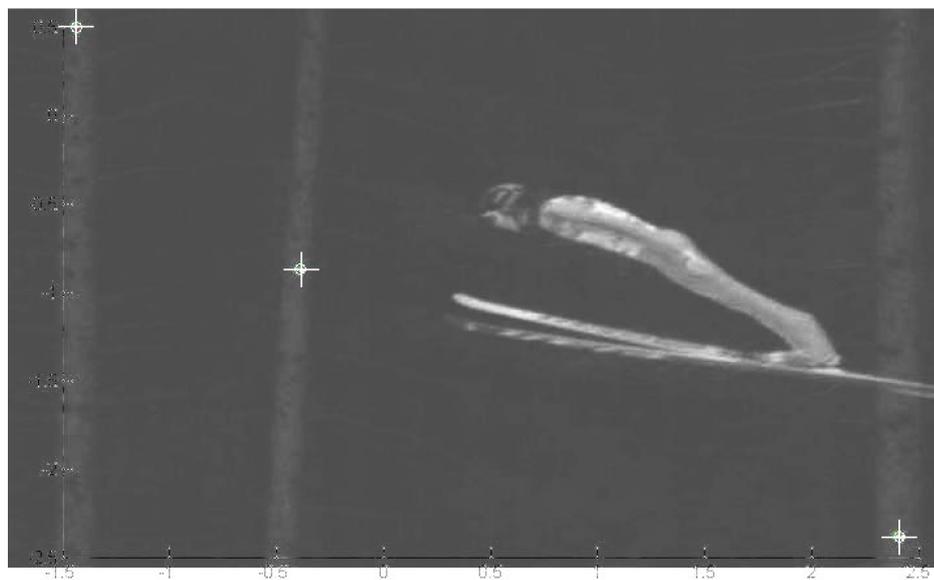
feld eingeschränkt werden. Eine Überlegung mittels Strahlensatz zeigt, dass zwei benachbarte Pixel mit $6,7 \mu\text{m}$ (Anhang E) und einem Abstand von 35 mm vom Projektionszentrum vor der Projektion auf den Aufnahmesensor, in 35 m Entfernung (die ungefähre Entfernung der Sprungebene von den Kameras) einen Abstand von 6,7 mm haben. Bei der Rekonstruktion müssen also zwei Fehlerquellen einkalkuliert werden. Erstens wird ein Pixel auf ein Gebiet von mindestens 6,7 mm in 35 Entfernung projiziert, andererseits ergibt die falsche Auswahl eines Pixels eine Verschiebung dieses Gebiets um 6,7 mm. Es ist nämlich keineswegs von vornherein klar, welcher Pixel bzw. welche Pixeladresse das Intensitätsmaximum darstellt. Mittels Fehlerfortpflanzung und einer angenommenen mittleren Abweichung von n Pixeln vom wirklichen Zielpixel ergibt sich für den Fehler des Durchmessers des Gebiets in Metern:

$$\Delta r = n * 6,7 * 10^{-3} \quad (2.38)$$

Für eine quantitative Aussage muss eine Abschätzung für n getroffen werden. Für das Hüftgelenk wird an dieser Stelle nach Abbildung 2.30 $n = 3$ gesetzt, womit sich ein Gebiet mit einem Durchmesser von 21 mm ergibt.

Abschließend wird die Frage zu beantworten sein, ob sich der vollständige Tsai Algorithmus für diese Anwendung bewährt. In Abbildung 2.31 ist der relative Fehler, der bei der Korrektur der Verzeichnung gemacht wird, über den gesamten Bildbereich abgebildet. Die Größenordnung dieses relativen Fehlers im Prozentbereich zeigt, dass eine Entzerrung mit den im Labor gewonnen inneren Parametern (Anhang D) keine genauigkeitssteigernde Auswirkung auf die Qualität der Rekonstruktion haben kann. Dies lässt sich darauf zurück führen, dass die Güte der modernen Objektive fast keine Verzeichnung verursachen. Es reicht deshalb aus, die Rekonstruktion ohne den dritten Schritt im Tsai Modell $X_d \rightarrow X_u$ auf Seite 68 durchzuführen.

2.4 Ergebnisse



(a)



(b)

Abb. 2.29: Vergleich von tatsächlich aufgezeichneten Bildpunkten mit theoretisch abgebildeten nach Entzerrung mit Gleichungen (2.34;2.35) und mit optimierten äußeren Parametern. a) Kamera1 b) Kamera3. Dabei ist ersichtlich, dass die Ergebnisse für Kamera 1 sehr zufriedenstellend sind, denn die Kreuze für die tatsächlichen Bildpunkte der Passpunkte liegen innerhalb der Kreise, welche die konstruierten Bildpunkte nach Anwendung von f auf die realen Passpunkte darstellen. Bei Kamera 3 ergeben sich beachtliche Abweichungen zwischen zwei entsprechenden Markierungen.

2.4 Ergebnisse

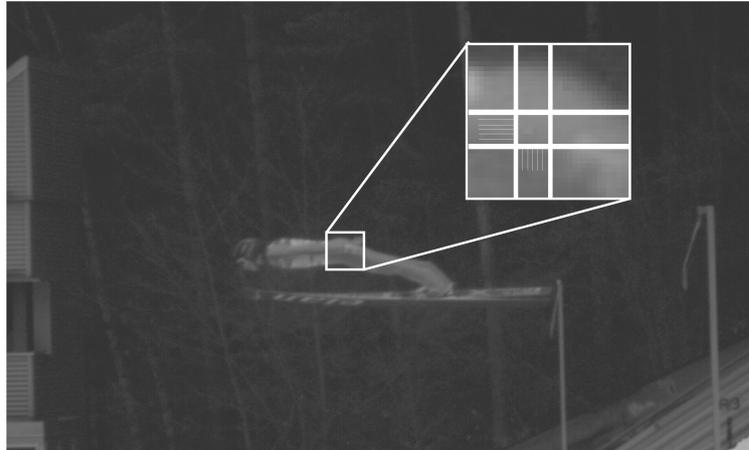


Abb. 2.30: Kamera 3: Das vermeintliche Hüftgelenk ist nicht genauer als auf ein 6×6 Pixelfeld einzuschränken. Dies ergibt mit der Fehlerabschätzung (2.38) einen Durchmesser des Fehlergebiets in einer 35 m entfernten Sprungebene von $3 * 6,7 \mu\text{m} = 2,1 \text{ cm}$.

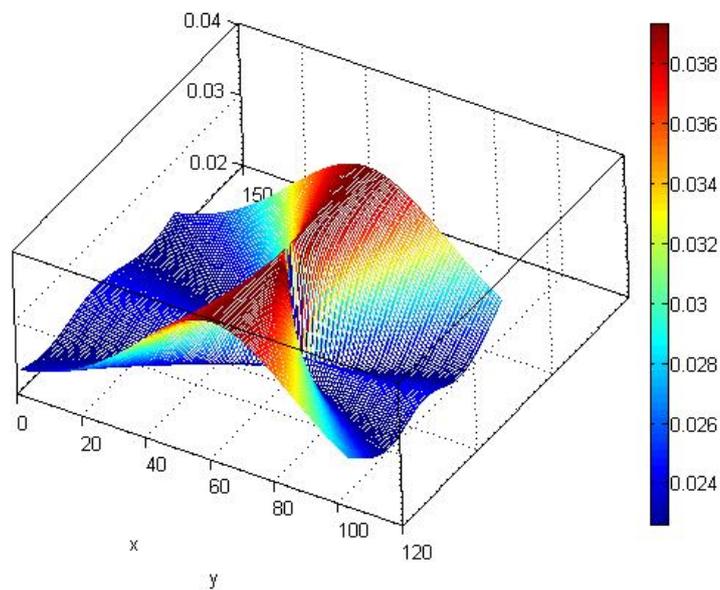


Abb. 2.31: Relativer Fehler in r bei der Aufhebung der Verzeichnung nach Anwendung der Gaußschen Fehlertheorie. Dabei entspricht die Grundfläche der Skalierung eines Fotos, die z-Achse dem relativen Fehler. Es zeigt sich, dass bei der Korrektur der Verzeichnung nicht überall im Bildbereich der selbe relative Fehler gemacht wird.

3 Fachdidaktik

3.1 Schülervorstellungen in der Physik

Die Fachdidaktik der Physik brachte in den letzten 25 Jahren einige aufschlussreiche Erkenntnisse hervor. Im Unterricht wurden diese bisher aber ungenügend umgesetzt. Es fehlte laut [23] an gesammelter Literatur in Buchform.

Bereits 1835 hat F. Diesterweg (zit. in [53, S.114]) eine genauere Untersuchung des Vorwissens und der Vorstellungen von Schülern gefordert. „Es hat fast 150 Jahre gedauert, bis seine Forderung nach einer gründlichen Erforschung des Schülerstandpunktes systematisch aufgegriffen wurde.“ [53]¹. In [53] wird versucht, die Schülervorstellungen, mit denen die Schüler in den Physikunterricht kommen, zu analysieren. Es geht dabei um die Problematik, dass Vorstellungen aus Alltagserfahrungen so verfestigt sind, dass sie nur schwer korrigiert werden können. Über Schülervorstellungen, Vorverständnisse oder Präkonzepte heißt es in [17]²: „Sie erlauben es den Menschen, sich in ihrer Umwelt zu orientieren und zu behaupten.“

Im Bereich der Optik konnte durch diese Kenntnisse der Lernerfolg bereits wesentlich verbessert werden. Für vieler Schüler der Mittelstufe ist von vornherein nicht klar, dass Objekte nur gesehen werden können, wenn sie von einer Lichtquelle beleuchtet werden. Ihnen ist nicht klar, dass ein Objekt strahlt und sie diese Strahlen empfangen [10]³: „Erstens gibt es Licht, das von Lichtquellen herrührt und das man sehen kann, wenn man das Auge der Lichtquelle zuwendet. Zweitens gibt es das Licht, das auf beleuchteten Körpern „liegt“ und eher als eine Eigenschaft dieser Körper angesehen wird.“ Das Ziel des Physikunterrichts ist, den Unterschied zwischen Lichtquellen und beleuchteten Objekten zu erklären [23, S.8]. Auf einigen Websi-

¹ Original zit. in [23, S.114]

² Original zit. in [23, S.17]

³ Original zit. in [23, S.8]

3.1 Schülervorstellungen in der Physik

tes, wie zum Beispiel [21], werden dazu viele hilfreiche Unterrichtsmaterialien angeboten. Zusammenfassend werden die Probleme sehr anschaulich in Abbildung 3.1 dargestellt.

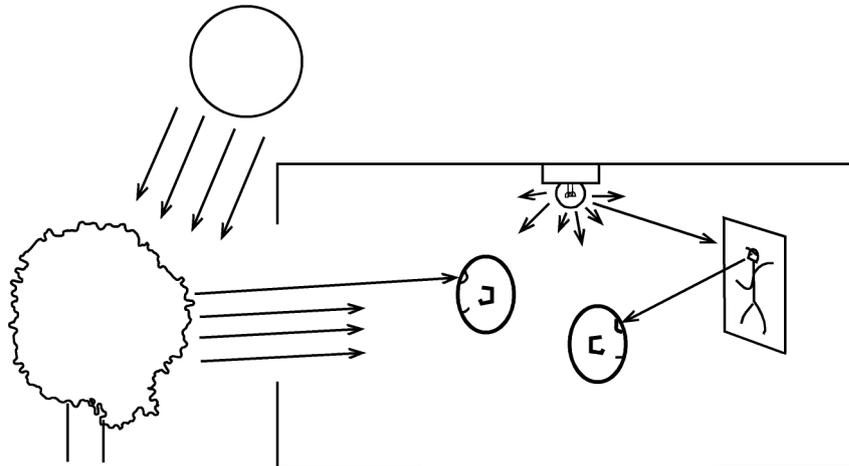


Abb. 3.1: Schüler müssen erkennen, dass viele Gegenstände des alltäglichen Lebens nur sichtbar sind, weil sie Licht aus der Umgebung, zB. Sonnenlicht, Raumbeleuchtung, selektiv reflektieren. Zu den Sendern gehören Lichtquellen wie Leuchtstoffkörper und die Sonne.

Durch Versuche im dunklen Klassenzimmer mit starken Scheinwerfern und farbigen Objekten kann das Sender-Empfänger Prinzip untermauert werden. Der Scheinwerfer sendet Licht aus, das von allen möglichen Objekten im Klassenzimmer reflektiert wird. Das menschliche Auge empfängt das reflektierte Licht. Ohne Sender kann das Auge nichts wahrnehmen, der Raum ist dunkel.

In Abschnitt 2.3.1 wird die Funktionsweise einer Lochkamera erklärt. Das zugehörige Schulexperiment besteht aus einer Kerze, einer Kartonröhre mit einer variablen Öffnung am einen und einer halbtransparenten Folie am anderen Ende. Die Oberfläche des beobachteten Objekts, der Kerze, wird in viele tausende Punkte oder „Flecken“ zerlegt. Von jedem dieser Punkte oder Flecken gelangen Strahlen durch die Öffnung der Kamera auf die halbtransparente weiße Folie am anderen Ende der Kartonröhre. Auf dem Weg vom „Objektfleck“ zum „Bildfleck“ [54] durchläuft das Licht nach den optischen Axiomen (S.55) Geraden.

Die Herleitung des Snelliusschen Brechungsgesetzes wird in Abschnitt 2.3.2 auf drei verschiedene Varianten vorgeschlagen. Die didaktische Aufbereitung der Thematik

3.1 Schülervorstellungen in der Physik

kann bewusst auf die geschichtliche Entwicklung gebaut werden. Was in [54] als „Historisierende Methode“ angeführt wird, beinhaltet eine Zeitreise in die Vergangenheit, um die Bedeutung der physikalischen Entdeckungen in deren Epoche begreifen zu lernen. Dies kann nach H. Wiesner [54] durch die Verwendung von Originalliteratur und vielleicht fächerübergreifendem Physik-Geschichteunterricht Staunen und Neugier wecken. Doch birgt dieses Unterrichtskonzept die Gefahr, moderne Entwicklungen nicht über die historischen und überholten einordnen zu können.

Mit der Behandlung physikalischer Aspekte in der Medizin und Biologie kann besonders die Lernmotivation bei Mädchen positiv beeinflusst werden. Über alle Schulstufen hinweg ist das Interesse am Physikunterricht bei beiden Geschlechtern relativ gering. Physik zählt neben Chemie zu den unbeliebtesten Fächern [54], wobei Mädchen ein wesentlich geringeres Interessensniveau haben. Im Gegensatz dazu besteht für das Unterrichtsfach Biologie ein einheitlich höheres Interesse, wobei sich Mädchen dafür mehr begeistern. Laut [54] kann diese Tatsache von der Mechanik (Biomechanik) über die Wärmelehre (Stoffwechsel, Temperaturhaushalt von Lebewesen) bis hin zur Optik (Fehlsichtigkeit, Röntgenstrahlung, Ultraschall) in vielen Kapiteln des Lehrplaninhalts in wertvolle Motivationsschübe für beide Geschlechter umgesetzt werden. Denn

„In aller Regel ist es aber so, dass das, was für Mädchen interessant ist, auch bei den Jungen auf großes Interesse stößt. Das Umgekehrte gilt aber nicht immer.“ [54]

Der Physikunterricht kann sich demnach an den Interessen der Mädchen orientieren. Fehlsichtigkeit könnte in der Optik einen solchen Bezug zur medizinischen Sichtweise herstellen. Die Kenntnis von Abbildungsfehlern, wie auf Seite 64 beschrieben, werden laut [54] und [55] in der Medizin zur Analyse von Fehlern im Abbildungssystem des menschlichen Auges verwendet.

Der Physikunterricht kann bei bereits starker Festigung der „vorunterrichtlichen“ Alltagsvorstellungen [23, S.9] nicht erfolgreich sein. Die tatsächlichen physikalischen Befunde werden kurzzeitig akzeptiert, im Laufe der Zeit aber von den vorher jahrelang angenommenen Fantasien abgelöst und wieder überdeckt [23, S.27]. Vorkonzepte erweisen sich als so stabil gegenüber Modifikation, weil sie im alltäglichen Leben

3.1 Schülervorstellungen in der Physik

so wunderbare Erklärungen liefern können. Generell ist es nicht Absicht die alten Präkonzepte zu löschen. Laut [57] und [23, S.32] gibt es zwei Möglichkeiten mit den Präkonzepten umzugehen.

- Die vorunterrichtlichen Vorstellungen sollen durch die physikalischen ersetzt, und auch im alltäglichen Leben verwendet werden.
- Die physikalischen Inhalte sollen begriffen und erklärt werden können, eine Koexistenz der alten Konzepte ist möglich bzw. sogar erstrebenswert. Die physikalische Erkenntnis soll als Bereicherung angesehen werden. Den Schülern soll bewusst sein, dass es eine alltägliche und eine wissenschaftliche Interpretation gibt. Letztere soll nicht als die einzig richtige angenommen werden, sondern als die zur Zeit in der Physik bewährte.

Selbst experimentelle Ergebnisse können Schüler nicht dauerhaft von der physikalischen Lehrmeinung überzeugen. In [23] wird dies auf den Punkt gebracht: “[. . .] dass Schüler bei Experimenten das sehen, was sie sehen „wollen“, oder - etwas präziser ausgedrückt - was ihnen ihre Vorstellungen zu sehen erlauben.“ [10]⁴ Mit Gegenfragen und Tatsachen konfrontiert, argumentieren sie damit, dass Ihre Vorstellung prinzipiell doch richtig sei, nur in diesem Experiment Sonderfälle oder Ungenauigkeiten vorzufinden sind. Zum Beispiel glaubt eine Schülerin einen Eisblock durch Einwickeln in Wolle schneller zum Schmelzen zu bringen als durch Einwickeln in Alufolie, weil sie erfahren hat, dass sie ja auch von Wolle gewärmt wird. Auch durch den gegenteiligen Ausgang des Experiments lässt sie sich nicht von ihrer Vorstellung abbringen. Dieses Ergebnis „sei durch irgendwelche anderen Umstände“ verursacht worden, ist sie sich sicher [9]⁵.

Zur Bewältigung der enormen Reizflut und der Lehrinhalte wird im Gehirn bewusst oder unbewusst selektiert. Die Selektionskriterien werden dabei von Vorwissen und „Vorerfahrungen“ [23, S.10] bestimmt. Die ausgewählten Informationen werden nachher mit einer subjektiven Bedeutung versehen. In einer Kommunikationssituation kann so zwar miteinander aber trotzdem nebeneinander vorbei geredet werden. Die Bedeutung von dem, was eine Lehrerin sagen will und dem, was ein Schüler

⁴ Original zit. in [23, S.9]

⁵ Original zit. in [23, S.21]

3.2 Unterrichtsentwurf

aufnimmt kann völlig divergent sein. In vielen Kommunikationsmodellen wird dieser Tatsache Rechnung getragen. Um die Gefahr von Fehlinterpretationen zu minimieren, muss der Lehrer über Vorstellungen, Vorerfahrungen und Vorwissen seiner Schüler Bescheid wissen. Er muss die Reizflut so bündeln, dass eine allzu fehlgeleitete Auswahl möglichst unterbunden wird, und die zugehörige „Konstruktion“ [23, S.11] der subjektiven Bedeutung steuerbar ist.

Sind dem Lehrer verschiedene Wissensstände der Schüler bekannt, kann er wie vorhin erwähnt bewusst auswählen, um Verständnisschwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, oder bewusst auf „Konfrontationstaktik“ setzen. Dabei werden bisherige Vorstellungen ad absurdum geführt. Eine weitere Möglichkeit bietet die „Umdeutungstaktik“. Hier wird den Schülern erklärt, dass sie bereits über grundlegend richtige Intuition verfügen, nur müssen neue oder andere Begriffe in ihr altes Denkschema eingebaut werden [17]⁶.

Ergebnisse von Interessensforschung [54] besagen, dass es grundsätzlich nicht zulässig ist, von mangelndem Interesse am Physikunterricht auf Uninteressiertheit an physikalischen Erscheinungen zu schließen. Mangelndes Interesse am Unterricht kann verschiedene Gründe haben. Für Schüler steht neben einer hervorragenden Erklärungskompetenz vor allem Geduld und Gerechtigkeit an erster Stelle [54] der Anforderungen an einen Lehrer. Als Empfehlung gibt [54], sich nicht auf die traditionellen Themen zu stürzen, sondern sich stets an der Welt der Schüler samt zugehöriger Interessenslage zu orientieren.

3.2 Unterrichtsentwurf

Mit den Erfolgen und Enttäuschungen der österreichischen Skispringer wächst und fällt das Publikumsinteresse. Dementsprechend sind auch Schüler zu gewissen Zeiten mit Liveübertragungen und detaillierten Analysen im öffentlichen Fernsehen und in Printmedien konfrontiert. Dies kann als Motivation für eine genauere Betrachtung des Skispringens in einigen Unterrichtseinheiten Physik betrachtet werden. In Verbindung zum Lehrplan der Physik für AHS findet die Behandlung der Sportart Skispringen in Bezug auf folgende Punkte Platz:

⁶ Original zit. in [23, S.19]

3.2 Unterrichtsentwurf

„Lehrstoff“⁷

Die spezielle Methodik der Physik hat zu Konzepten geführt, von denen folgende besonders wichtig und schulstufenübergreifend zu behandeln sind:

Denken in Modellen; Kausalitätskonzept; Naturgesetze und deren Grenzen; Vorhersagbarkeit über das Verhalten eines Systems; Universelle Gültigkeit der Naturgesetze; Teilchenkonzept; Trägheitskonzept; Energiekonzept; Konzept der Erhaltungsgrößen; Feldkonzept; Konzept von Raum und Zeit

2. Klasse:

Der Traum vom Fliegen: Ausgehend von Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler sollen die wesentlichsten Vorgänge beim Fliegen nach dem Prinzip „leichter als Luft“ und „schwerer als Luft“ verständlich gemacht werden. - Bewegungsmöglichkeiten von Kleinstkörpern, etwa Staubkörnern, Sporen oder Regentropfen verstehen; - die grundlegenden Vorgänge bei einer Ballonfahrt verstehen; - das „aktive“ Fliegen von beispielsweise Vögeln, Schmetterlingen oder Flugzeugen auf Grund einfachster Modellvorstellungen verstehen.

5. und 6. Klasse:

Die Schülerinnen und Schüler sollen folgende physikalische Bildungsziele erreichen: -[...] mit Hilfe der Bewegungslehre (Relativität von Ruhe und Bewegung, Bewegungsänderung; Energieumsatz und Kräfte, geradlinige und kreisförmige Bewegung, Impuls und Drehimpuls, Modell der eindimensionalen harmonischen Schwingung) Verständnis für Vorgänge, beispielsweise im Verkehrsgeschehen oder bei den Planetenbewegungen, entwickeln - an Hand von Grundeigenschaften mechanischer Wellen

7. und 8. Klasse:

-die bisher entwickelten methodischen und fachlichen Kompetenzen vertiefen und darüber hinaus Einblicke in die Theorieentwicklung und das Weltbild der modernen Physik gewinnen [...]

-den Einfluss der aktuellen Physik auf Gesellschaft und Arbeitswelt verstehen [...]

Als Unterrichtsziel wird die Kenntnis der Bedeutung der häufig vorkommenden Begriffe definiert. Weiters sollen die aerodynamischen Grundbegriffe wie c_w und c_l verinnerlicht werden. Im Schüleralltag kommt hauptsächlich der Lufwiderstandsbeiwert

⁷ Lehrplan der AHS-Oberstufe vom 8.7.2004.

3.2 Unterrichtsentwurf

c_1 vor. Dieser spielt beim Rad- und Skifahren und beim Inlineskaten eine bedeutende Rolle.

Die erste Stunde

Nach der Einstimmung der Schüler in die Skisprung-Thematik werden in der ersten Einheit die Grundbegriffe der Mechanik wiederholt. Dabei sollten die aus Untersuchungen bekannten Schülervorstellungen besprochen und adaptiert werden. Erhebliche Lernschwierigkeiten verursachen laut [23, S.109] die beiden vektoriellen Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung. Der falsche Umgang mit diesen vektoriellen Größen mündet in der falschen Beurteilung einer Kreisbewegung als unbeschleunigt, da ja "die Geschwindigkeit konstant bleibt". Im Volksmund hat ein kreisförmig bewegter Körper stets dieselbe Richtung. Statt eines tangentialen Geschwindigkeitsvektors wird wegen dieser Fehlinterpretation von Schülern aller Stufen ein gekrümmter Pfeil gezeichnet. Besonders die Vereinfachung in ebene Bewegungen verdunkeln die besondere Eigenschaft von vektoriellen Größen [23, S.109]. Zu selten wird mit Begebenheiten gearbeitet, bei der es tatsächlich auf die Richtungseigenschaft ankommt. Interessant erscheint die sprachliche Verwendung von: „Zwei Objekte haben dieselbe Richtung, wenn sie sich auf dasselbe Ziel hinbewegen. Die physikalische Bedeutung von gleicher Richtung besagt etwas anderes.

Mittels Mitschnitten von Liveübertragungen, in denen gezielt Begriffe wie „zu spät dran beim Absprung“, „durchgedrückt“ und „durchgerüttelt“ vorkommen, kann der Einstieg in die Thematik beginnen. Mit zugehörigen historischen Abrissen der Entwicklung im Skispringen wird auf folgende Fragen eingegangen.

- Einige Jahre lang wurde versucht mit längeren Skiern Wettkampfvorteile zu erlangen. Deshalb die Frage: Welche Bedeutung haben Skilänge und Körpergröße? Die Körpergröße fließt zusammen mit der Skilänge über die Projektionsfläche in die Bewegungsgleichungen für die Flugbahn ein. In den Gleichungen für die Luftkräfte Lift und Drag (1.22;1.23) fließt diese Projektionsfläche direkt ein. Das heißt, je größer die Angriffsfläche, umso stärker ist der Einfluss der Luftkräfte. Der Fallschirmspringer auf Seite 10 verwendet diese Tatsache um gesund landen zu können. Die Fläche wird durch Öffnen des Schirms enorm vergrößert.

3.2 Unterrichtsentwurf

- Nach sehr spektakulären Stürzen stellt sich die Frage: Warum ist Skispringen gefährlich? Der Skispringer erteilt sich beim Absprung einen Vorwärtsdrehimpuls. Dieser muss während des Fluges mit Hilfe der Luftkräfte kompensiert werden. Dabei variiert der Springer seine Flugposition. Windstöße oder technische Probleme können diese Ausgleichsbewegungen stören und der Skispringer stürzt ab (S.27).
- Einige Skispringer sind nach teils erfolgreichen Karrieren wegen Drogen und Essstörungen nahe an ihre gesundheitlichen Grenzen gestoßen. Was wird gegen die Gefahr von Essstörungen unter Skispringern getan? Essstörungen können auch im Biologieunterricht behandelt werden. Eine Anknüpfung an biologische oder soziale Aspekte von Essstörungen bietet sich deshalb an.
- ...

Der weitere Verlauf

Im weiteren Verlauf der Spezialeinheit „Skispringen im Physikunterricht“ werden mit ähnlichen Beispielen wie im Abschnitt 1.2.1 grundlegende aerodynamische Gesetzmäßigkeiten erarbeitet. Die endliche Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers und die aus dem fahrenden Auto gehaltene Hand sind aus der Alltagswelt der Schüler bekannte Begebenheiten. Der Vergleich zwischen dem Wurf eines Tischtennisballs und eines Schlagballs ist ein brauchbares Beispiel für Energie- und Impulserhaltung.

Das „Rütteln“, das während des Fluges manchmal beobachtet werden kann, ist das Ergebnis der ständigen Korrektur des Drehmoments des Skispringers bezüglich der anströmenden Luft. Die Absprungbewegung resultiert in einem vorwärtsgerichteten Drehmoment. Dieses wird im erfolgreichen Fall durch den Gegenwind aufgehoben. Gelingt es dem Springer nicht, durch seine Körperposition den Luftkräften entsprechende Angriffsflächen zu liefern, kann der initiale Vorwärtsdrehimpuls nicht neutralisiert werden (S.24). Der Springer stürzt ab. In diesem Zusammenhang wird auf die technischen Reglements eingegangen, die Skilänge und die Anzugsform sind exakt limitiert.

Je schwerer der Springer ist, desto weniger weit kann er springen. In den Bewegungsgleichungen auf Seite 27 stehen neben der Gravitationskraft nur die beiden Luftkräfte Lift und Drag. Das Verhältnis von Größe der Luftkräfte zu Gravitati-

3.2 Unterrichtsentwurf

onskraft ist für einen schweren Springer sicher kleiner als für leichte Sportler. Die Luftkräfte haben für den schweren Sportler im Vergleich geringeren Einfluss. Dies steht nicht im Widerspruch zu dem Schluss, der aus dem beobachteten Phänomen, dass ein Tischtennisball nicht so weit geworfen werden kann wie ein Schlagball (S.10), gezogen wurde. Dort wurde der Einfluss der Luft als wurfweite-vermindernd betrachtet. Beim Skispringen werden die Luftkräfte aber bewusst als flugweite-verlängernd eingesetzt. Die Frage ist, ob ein Tischtennisball vom Schanzentisch aus entlang des Aufsprunghügels weiter geworfen werden kann als ein Schlagball. Das kann er sicher nicht. Der Tischtennisball hat keine Möglichkeit die Luftkräfte als Gegenspieler zur Graviation auszunutzen. Würde man eine leichte Kartonplatte in ähnlicher Lage wie ein Skispringer in seine Flugbahn springt, vom Schanzentisch werfen, würde sie in der Luft stark trudeln und höchstwahrscheinlich noch weniger weit fallen als der leichte Tischtennisball. Würde man diese Platte aber mit einer sehr ausgeklügelten aber heute vielleicht noch nicht realisierbaren Steuerung versehen, die auf unterschiedliche Luftkräfte reagieren kann, könnte sie weiter fliegen als vorher, und vor allem weiter fliegen als der Tischtennisball. Der Skispringer verfügt mit seinen ausgezeichneten motorischen Fähigkeiten über eine solche Steuerung, und besitzt daher die Möglichkeit Luftkräfte gegen die Gewichtskraft flug- bzw. fallweite-verlängernd einzusetzen.

Der Tatsache, dass leichtere Skispringer weiter springen können, hat der Skisprungsport einen fahlen Beigeschmack zu verdanken. Oft wird von ausgehungerten Sportlern geredet. Auch hier konnte mittels Reglements die Situation entschärft werden. Der Body-Mass-Index (BMI) gibt an, wie sich die Körpergröße zum Gewicht verhält. Eine neue Variante davon, der Mass-Index (MI) berücksichtigt dabei auch die Proportionen des Körpers. Die Werte des BMI und MI eines Sportlers müssen in einem bestimmten Intervall liegen.

Als Abschluss der Unterrichtsthematik werden verschiedene Sprünge selbst analysiert und mit den TV Analysen verglichen.

4 Zusammenfassung

Der Skisprung erlebt nach kurzen Phasen des Desinteresses der Bevölkerung mit den Erfolgen der heimischen Springer wiederholt Höhenflüge. Die Stadien sind sehr gut besucht, in den Medien sind die „Helden der Lüfte“ stets omnipräsent und Sponsorgelder fließen vermehrt in die Ausbildung von Nachwuchssportlern und in die Preisgeldtöpfe. Erfolgreiche österreichische Skispringer könnten auch in der Schule das Interesse der Jugendlichen wecken. Die exakten Analysen in den öffentlichen Fernsehsendern werfen interessante Fragen auf, die in einer gründlichen Betrachtung im Physikunterricht gelöst werden können.

Die Unterrichtsgestaltung sollte mit einer kurzen historischen Einführung in den Skisprungsport beginnen. Dann wird die Dynamik des Skispringens besprochen. Dazu ist die Kenntnis von bestimmten Begriffen, wie sie in dieser Arbeit beschrieben sind, notwendig. Die Luftkräfte Lift und Drag (Auftriebs- und Widerstandskomponente) sollten an einigen Beispielen erläutert werden, weil aerodynamische Kräfte in der Welt eines Schülers in vielen Bereichen eine große Rolle spielen. So wird auf der Skispiste in der Hockeiposition versucht, eine möglichst hohe Abfahrtsgeschwindigkeit zu erreichen. Beim Radfahren oder Inlineskaten wird versucht, die Fortbewegung durch eine aerodynamisch günstige Position zu erleichtern. Mit starkem Gegenwind erhöht sich der Energieaufwand für das Vorwärtkommen. Wie komplex die Handhabung von aerodynamischen Effekten ist, zeigen zwei Tatsachen. Es kommt vor, dass Autos ab einer gewissen Geschwindigkeit instabiles Fahrverhalten zeigen. Der Effekt der Aerodynamik wurde in der Fertigung nicht korrekt berechnet, die Fahrzeuge müssen mit Spoilern nachgerüstet werden. Das Chassis eines Formel 1 Autos wird jede Rennsaison neu hergestellt um bessere aerodynamische Performance zu liefern. Es gibt also stets neue Erkenntnisse, die eine Modifikation der Form des Autos rechtfertigen.

Mit der Definition der Luftkräfte kann die Bewegung des Sportlers so unterteilt

4 Zusammenfassung

werden, dass diese abschnittsweise durch einfache Modelle beschreibbar werden. Im Anlauf beschreibt der Schwerpunkt des Sportlers zuerst eine gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung, im Radius der Anlaufspur eine zentripetal beschleunigte und kurz vor dem Absprung wieder eine geradlinige Bewegung. Durch den Radius der Anlaufspur sind Trockentrainings Sprünge auf den Stütz eines Trainingspartners, wie sie oft im Fernsehen gezeigt werden, nur bedingt als Trainingsmethode geeignet. Auf der Schanze wirken durch die Zentripetalbeschleunigung im Radius viel größere Kräfte, die den Absprungvorgang stark beeinflussen. Während des Anlaufs versucht der Sportler durch eine im Windkanal optimierte Hockeposition auf eine möglichst große Geschwindigkeit vor Auslösen der Absprungbewegung zu beschleunigen.

Der Absprung entscheidet über Erfolg oder Misserfolg. Es kommt neben perfektem Timing auf möglichst große Absprungkräfte an. Die Schwerpunktgeschwindigkeit des Sportlers wird durch die normal zum Schanzentisch gerichtete Absprungbewegung insgesamt vergrößert. Je größer die Absprunggeschwindigkeit, desto länger kann der Skispringer die Luftkräfte Lift und Drag gegen die Gravitation ausspielen. Bei der Absprungbewegung erfährt der Springer einen Vorwärtsdrehimpuls. Es schaut deshalb so aus, als ob der Skispringer nach dem Absprung nach vorne fallen würde. In der Tat passiert dies so lange, bis die angreifenden Luftkräfte ein genügend großes Gegendrehmoment erzeugen. Diese besonders heikle Phase muss erfolgreich absolviert werden, da sonst ein sehr gefährlicher Absturz auf den kurz nach dem Schanzentisch noch eher flachen Aufsprunghügel droht. Windböen können hier Stürze mit schweren Verletzungen verursachen. Kurz nach dem Absprung verursacht die Luftwiderstandskomponente einen starken Geschwindigkeitsverlust, ist also unerwünscht. Später ist sie erwünscht, weil die Bewegung des Skispringers sehr steil nach unten gerichtet ist, die Luftwiderstandskomponente ist damit nach oben gerichtet – das Fallen wird also verzögert.

Das Skispringen wird einerseits durch einfache mechanische Überlegungen beschreibbar, andererseits ist eine exakte Vorhersage über die Flugbahn eines Sportlers aufgrund der gekoppelten nichtlinearen Bewegungsgleichungen nicht möglich. Hierzu müssen Computermodelle erstellt werden, die mittels numerischer Verfahren Einflüsse von Skilänge, Skianzug, dessen Oberflächeneigenschaften, Körpergewicht usw. berechnen. Grundsätzlich muss im Unterricht hervorgehoben werden, dass das den Skisprung beschreibende Modell einfach und komplex zugleich ist, aber die Realität

4 Zusammenfassung

damit trotzdem nicht exakt beschrieben werden kann. Das komplexe Verhalten, das die Bewegungsgleichungen beschreiben, vollbringt ein Skispringer intuitiv. Er hat die Bewegungsgleichungen im Kopf und vor allem im Gefühl. Deshalb ist die Sportart des Skispringens ein gutes Beispiel für die enormen und „faszinierenden sensomotorischen Fähigkeiten des Menschen“ [24, S.15]. Meist gelingt es dem Springer, die Luftkräfte zu nutzen um nicht abzustürzen und gleichzeitig weit zu springen. W. Müller zitiert in [24, S.15] R. Riedl [31, S.51]:

„Wir Menschen neigen nun dazu, den Anteil des Rationalen an unseren Leistungen weit zu überschätzen. Und das ist höchst natürlich, denn es ist uns naturgemäß nur das Bewusste bewusst“

Das unterstreicht die Frage, ob ein Sportler den theoretischen Input so umsetzen kann, wie es das numerische Modell vorschlägt. Der größte Teil der menschlichen Bewegungssteuerung findet ohne bewusstes Eingreifen statt. Ein gutes Beispiel dafür ist die Tatsache, dass die wohl größte Entwicklung im Skisprung durch Zufall gemacht wurde. Der erste Sprung im V-Stil wurde vom Springer als Fehler empfunden, doch die von ihm erreichten Weiten überzeugten ihn, seinen Fehler beizubehalten.

In der Dissertation von B. Schmölder wurde mit einem numerischen Modell berechnet, dass bewusste Veränderung der Lift- und Drag-Komponente in bestimmten Flugphasenabschnitten positiven Einfluss auf die Wettkampfweite haben können. Das Messsystem, bestehend aus insgesamt vier Hochgeschwindigkeitskameras auf der Bergiselschanze dient der Vermessung der Flugbahn des Skispringers. Dies kann den Ergebnissen im Abschnitt 2.4 zufolge mit einer Genauigkeit von 5cm geschehen. Ausgehend von B. Schmölders Ergebnissen sollen in Zukunft aus dem Vergleich zwischen einer theoretischen und der tatsächlichen Flugbahn Optimierungsempfehlungen an den Sportler ergehen, um ihn unfallfrei und erfolgreich Wettkämpfe bestreiten zu sehen.

Literaturverzeichnis

- [1] BELLIONE, M. ; LOPEZ DE MENESES, Y. ; KOLSKI, S. ; JACOT, J. : Calibration of an embedded Camera for driver-assistant systems / Faculty of Engineering, Institute of Production and Robotics, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland. – Forschungsbericht. European Project SPARC
- [2] BORN, M. ; WOLF, E. : *Principles of Optics*. Second Revised Edition. Pergamon Press, 1964
- [3] BOUGUET, J.-Y. . *Camera Calibration Toolbox for Matlab*. www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/. 2007
- [4] BRENDEL, M. ; KÖNIG, K. . *Kepler Fächerübergreifend*. www.kepler-gesellschaft.de/Kepler-Foerderpreis/2006/Platz1_Faecheruebergreifend/Physik.html. 2006
- [5] DEMTRÖDER, W. : *Experimentalphysik 1*. 3.Auflage. Springer, 1994
- [6] DEMTRÖDER, W. : *Experimentalphysik 2*. 2.Auflage. Springer, 1999
- [7] Deutsches Institut für Normen e.V.: *DIN 18723*. Feldverfahren zur Genauigkeitsuntersuchung geodätischer Instrumente; Optische Distanzmesser. 1990
- [8] DIESS, S. : *Geschichte und Entwicklung des Skispringens*, Universität Salzburg, Diplomarbeit, 1991
- [9] DUIT, R. : Vorstellung und Experiment. In: *Naturwissenschaften im Unterricht – Physik/Chemie* 37 (1989), Nr. 48, S. 319–321
- [10] DUIT, R. : Schülervorstellungen – von Lerndefiziten zu neuen Unterrichtsansätzen. In: *Naturwissenschaften im Unterricht–Physik* 4 (1993), Nr. 16, S. 16–23

Literaturverzeichnis

- [11] FINSTERWALDER, R. ; HOFMANN, W. : *Photogrammetrie*. 3.Auflage. Walter de Gruyter&Co, 1968
- [12] GASSER, H.-H. : *Grundlagen für die Projektierung einer Skisprungschanze*. 2005. www.fis-ski.com: FIS, Dezember 1999
- [13] GÜRTLER, R. : *Zur speziellen Trainingslehre im Skispringen*. 1.Auflage. 1990
- [14] HAIM, H. : *Strukturanalyse von Imitations- und Schanzensprüngen anhand biomechanischer Kenngrößen*, Universität Salzburg, Diplomarbeit, 2004
- [15] HECHT, E. : *Optik*. 4.Auflage. Oldenbourg, 2005
- [16] JAHN, J. ; THEINER, E. : *Enzyklopädie des Skispringens*. 1. AGON Sportverlag, 2004
- [17] JUNG, W. : Alltagsvorstellung und das Lernen von Physik und Chemie. In: *Naturwissenschaften im Unterricht – Physik/Chemie* 34 (1986), Nr. 13, S. 2–6
- [18] KOMI, P. V. ; NELSON, R. C. ; PULLI, M. ; V., K. P. (Hrsg.): *Biomechanics of Skijumping*. 1. Kinesiologi Laboratory University of Jyväskylä and Biomechanics Laboratory Penn State University : Jyväskylä University Library, 1974
- [19] KRAUS, K. : *Photogrammetrie - Band 1*. 3.Auflage. Dümmlers Verlag Bonn, 1982
- [20] KWON, Y.-H. . *Mechanical Basis of Motion Analysis*. www.kwon3d.com/theory/dlt/dlt.html. 1998
- [21] LEITNER, E. ; FINCKH, U. ; FRITSCH, F. . *LeiFi*. www.leifiphysik.de/. 2001
- [22] MCGLONE, C. : *Manual of Photogrammetry*. Fifth edition. Asprs, 2004
- [23] MÜLLER, R. ; WODZINSKI, R. ; HOPF, M. : *Schülervortellungen in der Physik*. 1.Auflage. Aulis Verlag Deubner, 2004
- [24] MÜLLER, W. : Aerodynamik im Sport. In: *PLUC LUCIS* 2 (2003), S. 15–18

Literaturverzeichnis

- [25] MÜLLER, W. . *The Physics of Ski Jumping*. Invited Lecture: Forschungszentrum CERN, High Energy Physics Meeting in Kitzbühel. August 2005
- [26] MÜLLER, W. ; SCHMÖLZER, B. : Biomechanics of ski-jumping – Scientific jumping hill design. In: MÜLLER, W. (Hrsg.) ; SCHWAMEDER, H. (Hrsg.) ; KORNEXL, E. (Hrsg.) ; RASCHNER, C. (Hrsg.): *Science and Skiing*, Taylor & Francis, 1996, S. 36–48
- [27] OSTERMANN, A. . *Angewandte Mathematik für Lehramtsstudierende: Parameteridentifikation in linearen und nichtlinearen Modellen*. Skriptum zur Vorlesung an der LFU Innsbruck. 2004
- [28] PEDROTTI, F. ; PEDROTTI, L. : *Introduction to Optics*. Second Edition. PTR, Trentice Hall Inc., 1993
- [29] PERVÖLZ, K. : *Ein Kamerasystem zur Fusion von 3D-Abstandsinformation mit digitalen Farbbildern*, Fachhochschule Aachen, Diplomarbeit, 2003
- [30] REISENBERGER, E. ; MEILE, W. ; HIRSCHER, T. ; SCHMÖLZER, B. ; MÜLLER, W. : Basic problems associated with wind tunnel measurements and CFD in sports / TU Graz. 2005. – Forschungsbericht
- [31] RIEDL, R. : *Biologie der Erkenntnis*. 1.ed. Paul Parey Verlag, 1980
- [32] SCHLOSSER, T. : *Skispringen verständlich gemacht*. 1. Copress Verlag, 2001
- [33] SCHMÖLZER, B. ; MÜLLER, W. : Individual flight styles in skijumping: results obtained during Olympic Games competitions. In: *Journal of Biomechanics* 38 (2005), S. 1055–1065
- [34] SCHMÖLZER, B. : *Techniken im modernen Schisprung*, Karl-Franzens-Universität Graz, Diplomarbeit, 1992
- [35] SCHMÖLZER, B. : *Der Stellenwert der aerodynamischen Kräfte beim Schispringen und Schifliegen*, Karl-Franzens-Universität Graz, Diss., 1996
- [36] SCHUSTER, H. ; JUST, H. : *Deterministics Chaos*. 4.edition. WILEY-VCH, 1988

Literaturverzeichnis

- [37] SCHWAMEDER, H. : *Diokinematische und biodynamische Anayse der V-Tehnik im Skispringen*, Universität Salzburg, Diss., 1994
- [38] SCHWIRTZ, A. ; BÖSL, P. ; HARTUNG, G. ; HUBER, A. : Accuracy of the new dynamometric Measuring System at the Schattenbergschanze in Oberstdorf, Germany. In: LINNAMO, V. (Hrsg.) ; KOMI, P. V. (Hrsg.) ; MÜLLER, E. (Hrsg.): *International Congress on Science and Nordic Skiing - Congress Proceedings*. Vuokatti, Finland : Department of Biology of Physical Activity, University of Jyväskylä, June 2006, S. 41
- [39] SONNWEBER, H. : *Abbildungsfehler einer dicken Linse - Beschreibung, Demonstrationsexperimente und didaktische Aufbereitung*, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, Diplomarbeit, 1992
- [40] STOFFNER, R. : *3D-Posistionsbestimmung aus Videodaten*, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, Diplomarbeit, 2004
- [41] STRAUMANN, R. : Vom Skiweitsprung und seiner Mechanik. In: *Jahrbuch des SSV* 21 (1926), S. 6 – 22
- [42] STRAUMANN, R. : Vom Skiweitsprung und seiner Mechanik. In: *Jahrbuch des SSV* 22 (1927), S. 34 – 64
- [43] THOMAS, J. : *Mathematische Theorie der Aerodynamik des Skifluges*. Reihe B , Heft 11. Akademie-Verlag,Berlin, 1971 (Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin)
- [44] TSAI, R. Y.: A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses. In: *IEEE Journal of Robotics and Automation* RA-3 (1987), S. 323-344
- [45] VASS, E. . *Einführung in das Physikalische Grundpraktikum I-III*. Skriptum zum Physikalischen Grundpraktikum. 2003
- [46] VIRMAVIRTA, M. ; JUHA, I. ; KOMI, P. V. ; BRÜGGEMANN, G.-P. ; MÜLLER, E. ; SCHWAMEDER, H. : Characteristics of the early flight phase in the Olympic ski jumping competition. In: *Journal of Biomechanics* 38 (2005)

Literaturverzeichnis

- [47] VIRMAVIRTA, M. ; KIVEKÄS, J. ; KOMI, P. V.: Take-off aerodynamics in ski jumping. In: *Journal of Biomechanics* 34 (2001)
- [48] VIRMAVIRTA, M. ; KOMI, P. V.: Ski Jumpings Boots limit effective take-off in Ski Jumping. In: *Journal of Sports Sciences* 19 (2001)
- [49] VIRMAVIRTA, M. ; PERTTUNEN, J. ; KOMI, P. V.: EMG activities and plantar pressures during ski jumping take-off on three different sized hills. In: *Journal of Electromyography and Kinesiology* 11 (2001)
- [50] WALTER, W. : *Analysis 1*. 6. Auflage. Springer, 1985
- [51] WARD-SMITH, A. ; CLEMENTS, D. : Numerical Evaluation of the Flight Mechanics and Trajectory of a Ski-Jumper. In: *Acta Applicandae Mathematicae* 1 (1983), S. 301–314
- [52] WEGENER, P.-P. : *What Makes Airplanes fly?* 1.ed. Springer-Verlag, 1991
- [53] WIESNER, H. : Verbesserung des Lernerfolgs im Unterricht über Mechanik. In: *Physik in der Schule* 32 (1994), S. 122–127
- [54] WIESNER, H. . *Physik und Medizin - Chance zur Steigerung des Interesses am Physikunterricht*. Seminarunterlagen Fachdidaktik an der LFU Innsbruck WS07/08. 2007
- [55] WIESNER, H. ; COLICCHIA, G. : Objektive Verfahren zur Messung von Abbildungsfehlern beim Auge. In: *Praxis der Naturwissenschaften; Physik in der Schule* (2006), Nr. 2/55, S. 44–47
- [56] WINKLER, K. : *Dynamische und kinematische Analysen des Absprung im Skispringen - BergIsel Sprungschanze*, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, Diplomarbeit, 2006
- [57] WODZINSKI, R. : *Untersuchungen von Lernprozessen beim Lernen Newtonscher Dynamik im Anfangsunterricht*, Universität Frankfurt, Diss., 1996
- [58] ZIEGLER, F. : *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*. 3. Auflage. Springer, 1985

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schräger Wurf	8
1.2	Bernoulligleichung	14
1.3	Laminare und turbulente Strömung	17
1.4	Alltagsexperiment Autofahrt mit Lift und Drag	18
1.5	Fluss durch Oberfläche	19
1.6	Skispringer im Anlauf	23
1.7	Absprung Drehimpuls	24
1.8	Kräfte in der Flugphase	26
2.1	Tachymeterachsen und Kugelkoordinatensystem: Abbildung a) basiert auf dem Bild Theodolit Schema.PNG aus Wikimedia Commons von Robert Kropf und steht unter der GNU Free Documentation License 1.2, oder aktueller, zur Verfügung, b)Kugelkoordinaten	34
2.2	Matlabgrafik mit Passpunkten	35
2.3	Bildausschnitt von Kamera 1	36
2.4	Bildausschnitt von Kamera 2	37
2.5	Bildausschnitt von Kamera 3	37
2.6	Bildausschnitt von Kamera 4	38
2.7	Bildausschnitt von Kamera 5	39
2.8	Schnitt zweier Geraden	41
2.9	Schema 3D Rekonstruktion	46
2.10	Transformation vom Welt- ins Kamerakoordinatensystem	47
2.11	Schnitt Projektionsstrahl a)mit Projektionsstrahl bzw. b)Ebene	49
2.12	Zentralprojektion in einer Lochkamera	50
2.13	Bezeichnungen wie sie Y.-H. Kwon in [20] verwendet.	52
2.14	Lichtstrahl zwischen den Punkten A und B	56
2.15	Brechung an einer sphärischen Grenzfläche	58

Abbildungsverzeichnis

2.16	Brechung an zwei sphärischen Grenzflächen	59
2.17	Dicke Linse mit zwei Hauptebenen	59
2.18	Aufbau Fernrohr nach Kepler, Galilei und modern	61
2.19	Wellenaberration	62
2.20	a) sphärische Aberration, b) Koma: Diese Bilder basieren auf den Bildern Sphaerische Aberration.png und (Optik).png aus Wikimedia Commons von Michael Schreiter und stehen unter der GNU-Lizenz für freie Dokumentation 1.2, oder aktueller zur Verfügung.	63
2.21	Astigmatismus: Dieses Bild basiert auf dem Bild Astigmatism.svg aus Wikimedia Commons von Sebastian Kosch und steht unter der GNU Free Documentation License 1.2, oder aktueller, zur Verfügung	64
2.22	a)Bildfeldwölbung, b)Verzeichnung	66
2.23	Tsai Algorithmus	68
2.24	Strahlensatz	69
2.25	Bildpunktabweichung	70
2.26	Skalierungsfaktor der Sensorelemente	71
2.27	a) Kalibrierungsanordnung, b) Kameraperspektive	73
2.28	Optimierung von R und T	75
2.29	Vergleich zwischen real und projiziert	79
2.30	Ausschnitt aus Bild	80
2.31	Relativer Fehler in r	80
3.1	Sender Empfänger Prinzip	82
C.1	Handgeschriebenes Vermessungsprotokoll Seite 1	104
C.2	Handgeschriebenes Vermessungsprotokoll Seite 2	105
C.3	Handgeschriebenes Vermessungsprotokoll Seite 3	106

A Lebenslauf

Name	Robert Weitlaner
Geb.:	04.10.1982
Geburtsort	A-9900 Lienz
Wohnort	A-9931 Außervillgraten
Ausbildung	
1990-1994	Volksschule Außervillgraten
1994-2001	BRG Lienz
2002-2008	Lehramtsstudium Physik Mathematik an der LFU Innsbruck

B Tachymeter

name	θ [gon]	r [m]	ϕ [gon]
P22	150.0620	42.343	80.6680
P23	137.2260	54.552	84.2360
P24u	136.1200	41.768	90.2580
P24m	135.9940	42.606	84.4700
P24	136.1160	0	77.1560
P25u	135.3620	39.626	91.6920
P25m	135.2660	40.101	86.4520
P25	134.9180	0	72.0400
P19	253.1160	51.700	82.4420
P1	102.2080	10.738	81.7760
P2	120.6880	13.699	85.7700
P3	107.6640	13.196	85.1520
P18	290.0620	45.808	94.3880
P4	38.5840	34.873	117.1400
P5	36.0500	37.162	116.0160
P6	394.6340	39.556	134.1620
P17	342.8300	26.802	127.0460
P15	315.7120	50.932	111.7820
P16	315.9220	50.677	111.8660
P7	19.0220	61.807	133.2760
P8	395.4740	57.761	137.3900
P9	16.2080	73.640	132.8640
P12	364.0760	52.809	134.8760
P13	327.7560	66.446	119.2380
P14	328.0040	66.287	119.3640
P10	393.3020	144.219	130.8120
P11	379.9940	145.625	130.4920

B Tachymeter

P20	202.8100	45.694	74.8420
P21	202.2460	45.625	74.8140
R1	193.5940	21.360	75.9360
S1	383.9740	3.343	139.2200
S2u	393.6980	20.523	135.2740
S3	394.6080	40.615	136.8320
S4u	394.8840	59.429	136.2880
L1	225.6740	29.743	79.7920
S5	367.2160	62.347	134.3860
S6	359.5460	44.037	133.2700
S7u	341.6020	26.127	126.5480
S8	286.4920	15.249	99.4840
S4o	0	0	0
S2o	0	0	0
S7o	0	0	0

Tab. B.1: Daten der Vermessung mit einem Tachymeter: Punktname, Horizontalwinkel θ , radialer Abstand r und Vertikalwinkel ϕ

C Messprotokoll

C Messprotokoll

		17.11.20		
Witterungsknoten 0,0		106,8000		
	Kamera 2			
	P ₁	102,0640	10,776	102,0640 statische Bauteile
	P ₃	107,580	23,02	85,5940
	P ₂	107,5520	23,97	85,0240
	Kamera 3			
	P ₄	38,5840	34,873	117,1400 117,1400 Durchstoßpunkt Trägere
	P ₅	36,0500	37,162	116,0160 Durchstoßpunkt Trägere Balcon
	P ₆	394,6340	39,556	134,1620
	P ₇	342,8300	26,802	127,0460 direkt über maßen
	Kamera 4			
	Fundament P ₇	19,0220	61,807	133,2760 Exit
	P ₈	395,4740	57,761	137,3900
Fundament Gebäude-Nähe	P ₉	16,2080	73,640	132,8640
	P ₁₂	364,0760	52,809	134,8760 Gebäude im Nenn
	Wahl-Linie			
	rechts P ₁₀	393,3020	144,219	130,8120
	links P ₁₁	379,9940	145,625	130,4920
	Kamera 4			
	P ₁₃	327,7560	66,446	119,2380
	P ₁₄	328,0040	66,287	119,3640

Abb. C.1: Handgeschriebenes Protokoll mit Hilfsskizzen zur nachträglichen Orientierung über die Lage der Punkte im Gelände. Die weiteren Daten: Punktname, Horizontalwinkel θ , Radialabstand r und Vertikalwinkel ϕ .

C Messprotokoll

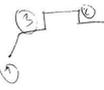
Kamera 3							
	P ₁₅	315,7120	50,832	111,7820			
	P ₁₆	315,9220	$\frac{50,677}{255}$	111,8660			
Kamera 2							
	P ₁₈	290,0620	45,808	84,3880	postprojektion		
Kamera 1 P ₁₉ 				253,1160	51,700	82,4420	
Schantenkinder P ₂₀				202,8100	45,694	74,8920	
				P ₂₁ 202,2460	45,625	74,8120	
gelbes Punkt P ₂₂				150,0620	42,343	80,6680	
				P ₂₃ 137,2260	54,552	84,2360	
	P ₂₄	11 136,1200	41,768	90,2580			
		11 135,9920	42,606	84,4680			
		0 136,1180		77,1560			
P ₂₅				11 135,3620	39,626	91,6920	
				11 135,2660	40,101	86,4520	
				0 134,9180		72,0400	
Widmenen 				0 102,2080	10,738	81,7760	P26
							
				② 120,6880	13,699	85,7700	P27
				③ 107,6640	13,196	85,1520	P28

Abb. C.2: Protokollseite 2 mit Skizzen, Punktname, Horizontalwinkel θ , Radialabstand r und Vertikalwinkel ϕ

D Kalibrierungsparameter

Der Zusammenhang zwischen den Parametern in Tabelle D.1 und jenen, die Tsai verwendet (Tab. 2.1) kann mit der Definition der Kalibrierungsparameter auf der Website [3] und anschließendem Vergleich von äquivalenten Gleichungen hergeleitet werden (Tab. D.2).

f_c	Focal length	$\dim(f_c)=2$
cc	Principal point	$\dim(cc)=2$
$alpha_c$	Skew	skalare Größe
k_c	Distortion error	$\dim(k_c)=5$
err	Pixel error	$\dim(err)=2$

Tab. D.1: Das Ergebnis der inneren Orientierung wird von der Toolbox [3] als Liste von Variablen und Vektoren ausgegeben.

Die Daten werden in eine Matlab Skriptdatei geschrieben, wobei sich die Bedeutung der Variablen aus dem Vergleich äquivalenter Beziehungen in den beiden Modellen [44] und [3] ergibt.

fc(1)	$s_x d_x^{l-1}$
fc(2)	d_y^{-1}
cc(1)	C_x
cc(2)	C_y
alpha _c	0
kc(1)	κ_1
kc(2)	κ_2
kc(3)	tangentiale Verzeichnung
kc(4)	—“ —
kc(5)	κ_3

Tab. D.2: Äquivalente Parameter in den Modellen von R. Tsai [44] und J.-Y. Bouguet[3]

D Kalibrierungsparamater

Die Ergebnisse der Toolbox

```
% Intrinsic and Extrinsic Camera Parameters
%
% This script file can be directly executed under Matlab to
%recover the camera intrinsic and extrinsic parameters.
% IMPORTANT: This file contains neither the structure of the
%calibration objects nor the image coordinates of the
%calibration points.
%All those complementary variables are saved in the complete
%matlab data file Calib_Results.mat.
% For more information regarding the calibration model visit
%http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\_doc/

%-- Focal length:
fc = [ 4951.737762903202600 ; 5247.624136268949800 ];
fc4 = [7073.91108986172    7496.60590895564];

%-- Principal point:
cc = [ 511.500000000000000 ; 383.500000000000000 ];

%-- Skew coefficient:
alpha_c = 0.000000000000000;

%-- Distortion coefficients:
kc = [0.081680667958795 ; -3.337272366778169 ;
      -0.050456795360285 ; 0.004262245424713 ;
      0.000000000000000 ];

%-- Focal length uncertainty:
fc_error = [ 291.894836892243860 ;
            578.235332788143180 ];

%-- Principal point uncertainty:
cc_error = [ 0.000000000000000 ;
```

D Kalibrierungsparamater

```
0.0000000000000000 ];
```

```
%-- Skew coefficient uncertainty:
```

```
alpha_c_error = 0.0000000000000000;
```

```
%-- Distortion coefficients uncertainty:
```

```
kc_error = [ 0.236627323485221 ; 21.520856432053183 ;
```

```
0.004944790470302 ; 0.006989733222755 ;
```

```
0.0000000000000000 ];
```

```
%-- Image size:
```

```
nx = 1024;
```

```
ny = 768;
```

E Kameradatenblatt

Das Messsystem besteht aus Hochgeschwindigkeitskameras vom Typ LightWise LG-1.3-G-1394. Jede dieser Kameras ist mit jeweils einem Rechner verbunden, der mittels Netzwerk vom Büro unterhalb des Schanzentischs aus gesteuert wird. Die Kameras können mit einer Frame Rate von 30fps (frames per second) Bilder mit einer Auflösung von 1280x1024 Punkten aufzeichnen. Die Sensorgröße ist nach folgendem Datenblatt 6,7x6,7 μm .

LightWise LW-1.3-G-1394

1.3 Megapixel Global Shutter
FireWire Camera



Features

- **Low Noise Progressive Scan 1.3 Megapixel Monochrome Image Sensor**
- **IEEE-1394 IIDC DCAM Specification Version 1.3 Compliant Interface**
- **High Frame Rate: 27 fps (1280x1024)**
- **Ultra High Quality Smooth Digital Zoom and Pan for any Region of Interest. Fully controllable by host computer**
- **2 1394 ports allows Cascading of cameras in remote installations**
- **Arbitrary Region of Interest**
- **Multiple Trigger Modes including true Global Full-Frame Shutter**
- **Programmable I/Os for lighting and synchronization control**
- **On-board 16Mbyte Multi-Image Buffer**
- **1 Million gate Onboard FPGA and Programmable “Smart” architecture enables custom configurations**
- **Compatible with a wide range of 3rd Party Software Application**
- **Soft-load Firmware-Upgradeable from Host Computer**
- **C-Mount Included**
- **API Specification and SDK Available**
- **Single 1394 Cable for Image, Power and**

The new LightWise area scan smart cameras combine advanced digital processing technology and the FireWire™ standard to give a low-cost, high performance solution to machine vision applications. These compact cameras shorten the typical integration time associated with vision systems and offer flexibility for OEM solutions. Fully compliant with the IEEE-1394 IIDC DCAM Specification Version 1.3, these cameras can be used with any compatible programs or other 3rd Party Software. Frame Rates up to 27 fps at full resolution and 90+ fps for VGA resolution. The LW-1.3-G provides a true full frame global shutter capability for high speed motion critical applications. The cameras now include the ISG High Quality Digital Pan and Zoom Processor, which allows computer controlled, pixel accurate ROI panning and multi-tap filter based digital zoom for the ultimate flexibility in your application. All camera controls are done via the 1394 interface, which includes a fully programmable image processing pipeline and dynamic range/gamma control LUT for any desired response curve. An on-board image buffer for up to 9 monochrome images is also featured in these cameras, as well as a wide range of triggering and strobe control capabilities. These cameras come packaged with driver software and a user's manual.

Sensor Specifications

Parameter	Specification	Remarks
Pixel architecture	4-transistor active pixel sensor	Allows for rolling and synchronous shutter
Pixel size	6.7 μm x 6.7 μm	The resolution and pixel size results in a 2/3" optical format
Resolution	1280 x 1024	
Pixel rate	40 MHz	
Full frame rate	± 30 frames/second	Depending on blanking time (assumed 3.5 μs)
Shutter types	- Rolling - Snapshot	- Continuous imaging. - Triggered synchronous shutter with integration and readout separate in time
FPN (on chip corrected)	0.2-0.5% RMS < 0.1% RMS	Synchronous (snapshot) shutter Rolling curtain shutter
PRNU	10% p/p	2% RMS
Conversion gain	20 $\mu\text{V}/\text{electron}$	Rolling curtain shutter
Sensitivity	2.7 $\text{V}/\text{Lux}\cdot\text{sec}$... $\text{V}\cdot\text{m}^2/\text{W}\cdot\text{s}$	White light / visible band only (180 lx = 1 W/m^2)
Peak QE * FF	About 30-35% QE*FF	Peak QE*FF = 30.. 35 %
Average SR*FF Average QE*FF		Over the visible range
Optical cross talk	8-16%	Cross talk to the nearest neighbor
Dark current	200-500 pA/cm^2 at RT or ± 750 e-/s	Auto saturation time in the order of 30 to 60 s depending on the shutter mode
Noise electrons [e-]	40-60 20-30	Synchronous shutter Rolling curtain shutter
Saturation charge [e-]	60000	Thus S/N ratio in the order of: 60000:50 = 1200 synchronous shutter 60000:25 = 2400 rolling shutter
Spectral sensitivity range	400 – 1000 nm	QE at wavelengths shorter than 400 nm has to be verified.
Parasitic sensitivity	< 1%	i.e. sensitivity to light during the periods that the synchronous shutter is off